Arvutigraafika. Loengud 2 ja 3.

Kontrollülesanded

Iga ülesande korrektne lahendus annab 0.5 punkti. Lahendusi võib esitada e-mailitsi (`kt@ut.ee`) või paberis kuni 3. oktoobrini 2005 a. k.a.

1. Olgu s sirge ruumis $\mathbb{R}^2$, mis läbib nullpunkti. Teda saab kirjeldada parameetriliselt kui

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{s}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

või ilmutamatult kui

$$\mathbf{n}^T\mathbf{x} = 0 \quad .$$

Avalda normaali $\mathbf{n}$ koordinaadid suunavektori $\mathbf{s}$ koordinaatide kaudu.

2. Olgu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ - punktid ruumis $\mathbb{R}^2$. Leia sirglõikude $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ja $[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ lõikepunkti. Vihje: kasuta lõikude parameetrilist esitust.

3. Tõesta kolmnurga võrratus ning tuleta sellest ka võrratusi $\|\mathbf{p}\| - \|\mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\|$

4. Olgu $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ ortogonaalsed ühikvektorid kolmemõõtmelises ruumis. Millist teisendust teostab maatriks $\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \mathbf{q}\mathbf{q}^T$?

5. Moodustagu $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ja $\mathbf{r}$ ortonormaalse baasi ruumis $\mathbb{R}^3$. Tõesta et $\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \mathbf{q}\mathbf{q}^T + \mathbf{r}\mathbf{r}^T = \mathbf{I}$, kus $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks.

6. Ortogonaliseeri järgmist vektorite komplekti Gram-Schmidt-i algoritmiga:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T \\
\mathbf{e}_2 &= (-1, 1, -1)^T \\
\mathbf{e}_3 &= (0, -2, -2)^T
\end{aligned}$$

7. Arvuta kolmnurga pindala, kui tema tipud on punktides

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (1, 2, 3)^T\\ \mathbf{b} &= (-2, 2, 4)^T\\ \mathbf{c} &= (7, -8, 0)^T\end{aligned}$$

8. Punktid $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^2$ on lihthulknurga[1] tipud loetletud vastupäeva. Näita et polügoni pindala S avaldub kui:

$$S = \frac{1}{2}(|\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2| + |\mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3| + \cdots + |\mathbf{p}_n \quad \mathbf{p}_1|)$$

Leia seos selle valemi ja mat. analüüsist tuntud Green'i valemi vahel:

$$\oint_{\mathcal{D}} f(x, y)\mathrm{d}x + g(x, y)\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Vihje 1: olgu $f(x, y) := -y$, $g(x, y) := x$.
Vihje 2: $|\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_1 \quad (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)|$.

9. Kas vasakukäelise koordinaadistiku puhul kolmik $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \times \mathbf{q})$ on paremakäeline või vasakukäeline?

10. Olgu $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — pidev funktsioon mis iga $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ puhul rahuldab $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$. Näita et sellest järeldub et iga $\alpha \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{x}$ korral $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, ehk f on lineaarteisendus.

11. Leia maatriks $\mathbf{A}$, mis teisendab vektori $(0, 1)^T$ vektoriks $(1, 2)^T$, ning vektori $(1, 2)^T$ vektoriks $(2, 3)^T$.

12. Olgu $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ lineaarselt sõltumatud vektorid ruumis $\mathbb{R}^m$. Leia $\operatorname{rank}(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T)$.

13. Vaatleme mingit hulktahuka tippudega $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k$. Tähistagu $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_l$ hulktahuka tahkude normaalvektoreid. Rakendame hulktahukale lineaarteisendust $\mathbf{F}$ ning saame uut hulktahuka tippudega $\mathbf{F}\mathbf{p}_1, \mathbf{F}\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{F}\mathbf{p}_k$. Kuidas avalduvad uue hulktahuka normaalvektorid?

14. Leia afiinse teisenduse maatriks (homogeensetes koordinaatides), mis teostaks pööret nurga ϕ võrra ümber punkti koordinaatidega (c_x, c_y).

[1] *lihthulknurk* — selline hulknurk, mille servad ei lõiku teineteisega