

Heli, lained ja harmooniline liikumine

Ilja Livenson

Tartu Ülikool
The Mathematics of Sound and Music

February 22, 2007

- 1 Filosoofia
 - Küsimused

1 Filosoofia

- Küsimused

2 Kõrvad

- Anatoomia
- Organismide kuulamisvõimelisus

- 1 Filosoofia
 - Küsimused
- 2 Kõrvad
 - Anatoomia
 - Organismide kuulamisvõimelisus
- 3 Heli intensiivsus

- 1 Filosoofia
 - Küsimused
- 2 Kõrvad
 - Anatoomia
 - Organismide kuulamisvõimelisus
- 3 Heli intensiivsus
- 4 Sinusoid ja harmoonilised võnkumised
 - Võnkumised
 - Võnkuv nöör

Küsimused

Galileo

Mis kukkub kiiremini: kas kergemad objektid või raskemad?

Küsimused

Galileo

Mis kukkub kiiremini: kas kergemad objektid või raskemad?

Dave Benson

Miks õhk ei kukku?

Küsimused

Galileo

Mis kukkub kiiremini: kas kergemad objektid või raskemad?

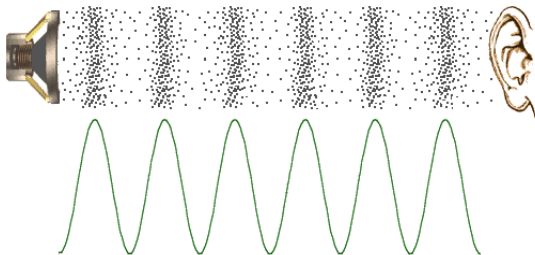
Dave Benson

Miks õhk ei kukku?

Põrkede tihedus

$$\text{Põrkede tihedus} = \frac{\text{keskmise kiirus}}{\text{keskmise vaba tee}} \sim 10^{10} \text{ pörke sekundis}$$

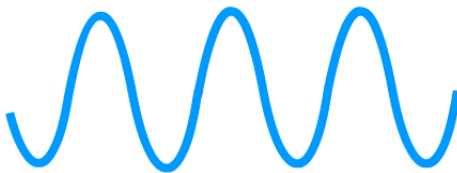
Heli laine



Heli

Heli on pikilaine õhus.

Laine omadused



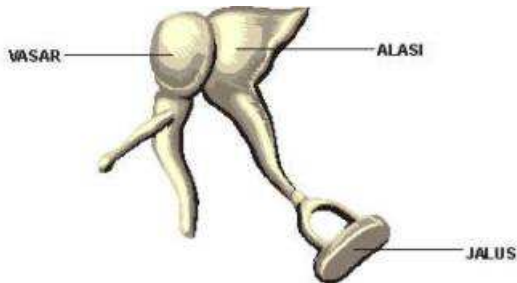
Füüsikaline	Tajutav
Amplituud	Helitugevus
Sagedus	Helikõrgus
Spekter	Tämber
Kestvus	Pikkus

Väliskõrv



- Väline kuulmekäik on veidi kõver toru, mis lõpeb õhukese pingul trummikilega.
- Helid jõuavad kuulmekäiku pidi trummikilele ja panevad selle võnkuma.
- Trummikilelt levivad helilained edasi keskkõrva.

Keskkõrv

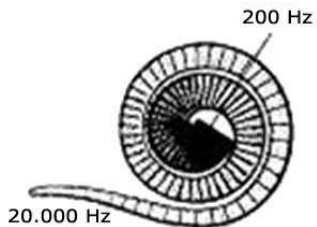


- Keskkõrva moodustab trummiõõs, milles on kolm kuulmeluukest: vasar, alasi ja jalus.
- Kuulmeluukesed annavad trummikile võnkumised edasi sisekõrva, võimendades samal ajal nende tugevust.

Sisekõrv

- Sisekõrva kuulmiselund on teokujuline luustunud spiraal. Selles on vedelikuga täidetud kanalid, mis on üksteisest membraaniga eraldatud.
- Alumisel membraanil on arvukalt mikroskoopiliste kiukestega ühendatud kuulmisrakke.
- Membraan suureneb teo lõpu suunas - mida suuremaks ta laheb, seda madalamaid sagedusi saab ta tajuda.
- Sellega on võimalik mõnikord maskeerida korgsageduslikku heli madalasagedusliku heliga, aga mitte vastupidi.

Sisekõrv



Organismide kuulamisvõimelisus

Organism	Vahemik (Hz)
Kilpkonn	20 - 1,000
Konn	100 - 3,000
Kass	30 - 50,000
Koer	50 - 46,000
Tuvi	200 - 10,000
Homo sapiens	20 - 20,000
Hiir	1,000 - 100,000
Delfiin	1,000 - 130,000

- Madalaid sagedusi mõnikord võib lihtsalt tunda.
- On näidetud, et ultraheli aktiveerub aju.

Detsibell

Heli intensiivsus

$$0\text{dB} = 10e^{-12} w/m^2$$

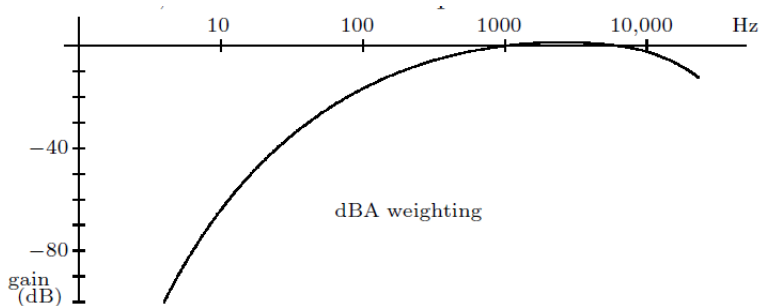
10dB - 10 korda suurem

20dB - 100 korda suurem

- Kasutatakse ka suhtelise mõõtühikuna.
- Nt: võimsuse juurdekasv või *Signal to Noise Ratio* voimendis.
- 3dB on umbes 2:1 suhe.

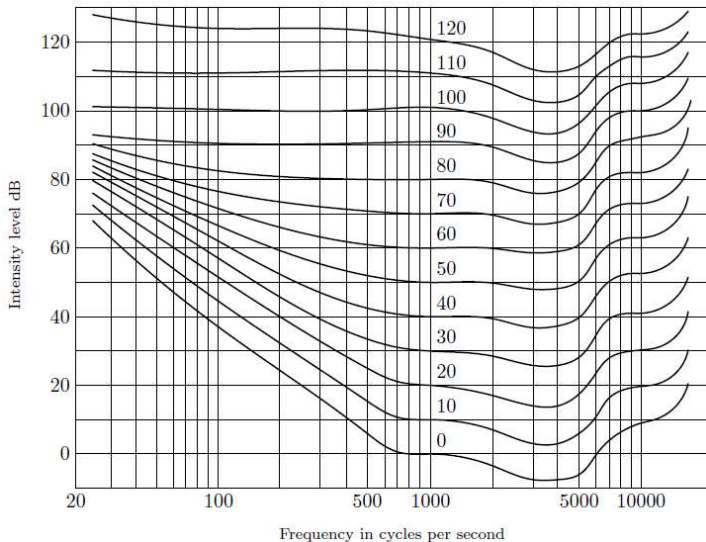
Absoluutne mõõteühik

- dB SPL - *Sound Pressure Level*.
- Erinevad sagedused - erinevad kaalud (A, B ja C kõverad).
 Kõige populaarsem on A-kõver.



Helitugevuse tajumine

- Heli sagedus ja tajutav helitugevus on samuti seotud.
- Fletcher-Munson kõverad.
- *phon* - helitugevuse ühik. 1 phon on sama intensiivne, kui tavaline 1000Hz signaal.
- Heli tekitamine võtab väga vähe võimsust: nt. inimese hääl = 0.00002W.



Limen

- *Limen* - kõige väiksem erinevus kahe järjestikulise tooni vahel, mida inimene saab 75 juhtudel eristada.
- Kasutatakse heliintensiivsuse ja sageduse kirjeldamiseks.
- Mõlemal juhul sõltub nii sagedusest, kui ka intensiivsusest.
- Mõõdetakse centides.

Valuutakursid

100 cents = pool tooni

1200 cents = oktaav

Frequency (Hz)	Intensity (dB)									
	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80
31	220	150	120	97	76	70				
62	120	120	94	85	80	74	61	60		
125	100	73	57	52	46	43	48	47		
250	61	37	27	22	19	18	17	17	17	17
550	28	19	14	12	10	9	7	6	7	
1,000	16	11	8	7	6	6	6	6	5	5
2,000	14	6	5	4	3	3	3	3	3	3
4,000	10	8	7	5	5	4	4	4	4	
8,000	11	9	8	7	6	5	4	4		
11,700	12	10	7	6	6	6	5			

- Eelmine tabel näitas situatsiooni kahe **järjestikulise** tooni jaoks.
- Üheaegsete toonide puhul kasutatakse termin *“limit of discrimination”* - eristamise limiit.
- *Beat*'i tõttu on palju lihtsam eristada üheaegsed noodid.

Võnkumised

- Harmooniline võnkumine
- Sumbuvad võnkumised
- Sundvõnkumised

Miks just siinus?

Harmooniline võnkumine

Harmonoolise võnkumise diferentsiaalvõrrand

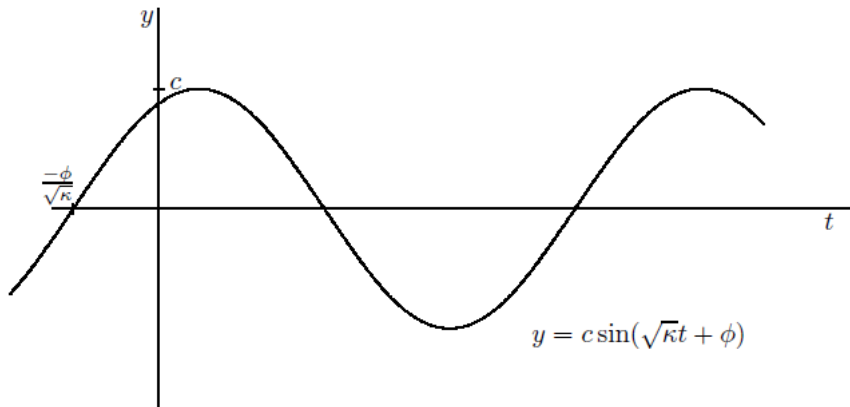
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y$$

Selle lahendus on

$$y = A \cos \sqrt{\kappa} t + B \sin \sqrt{\kappa} t$$

või

$$y = c \sin (\sqrt{\kappa} t + \phi)$$



Võnkumised: kokkuvõtte

Harmooniline võnkumine

$$y = A \cos \sqrt{\kappa}t + B \sin \sqrt{\kappa}t$$

Sumbuvad võnkumised

Ülesummutatud $y = Ae^{(-\mu + \sqrt{\Delta})t/2m} + Be^{(-\mu - \sqrt{\Delta})t/2m}$

Alasummutatud $y = e^{\frac{-\mu t}{2m}} (A \sin(ft) + B \cos(ft))$

Kriitiliselt summutatud $y = (At + B)e^{\frac{-\mu t}{2m}}$

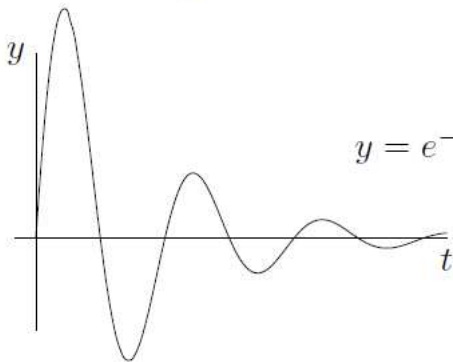
Sundvõnkumised

- Oleneb sundfunktsioonist. Kui ta on sinusoid, siis tulemuseks on skaleeritud/nihkutud sinusoid.
- Põhjustab resonantsi.

Sumbuvad võnkumised

Alasummutatud

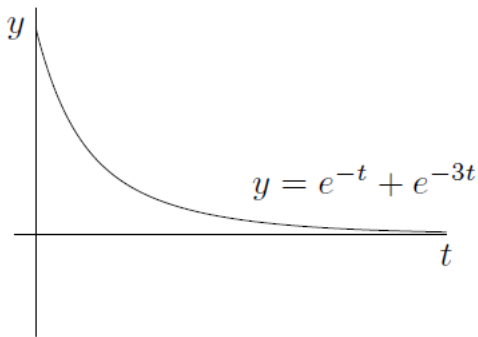
$$y = e^{-t}(A' \cos 5t + B' \sin 5t).$$



Sumbuvad võnkumised

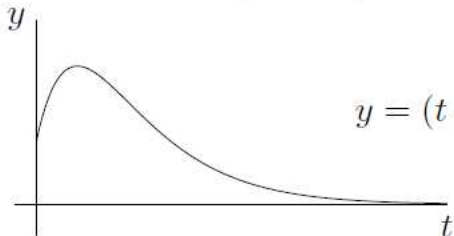
Ülesummutatud

$$y = Ae^{-t} + Be^{-3t}.$$



Sumbuvad võnkumised

Kriitiliselt summutatud
 $y = (At + B)e^{-2t}$.



$$y = \left(t + \frac{1}{10}\right)e^{-2t}$$

Löögid

- Mis siis, kui kaks sinusoidkujulist lainet mängitakse korraga?
- Miks me kuulame löögid, kui sagedused on väga sarnased?

Trigonomeetrilised võrdsused

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$$

$$\cos u - \cos v = 2 \sin \frac{1}{2}(u + v) \sin \frac{1}{2}(u - v)$$

Näide

Küsimus

Oletame, et meil on kaks noodi: A (440 Hz) ja B (436 Hz). Ning me mängime neid samaaegselt.

Millise sageduse me kuulame? Mis on löökide sagedus?

Näide

Küsimus

Oletame, et meil on kaks noodi: A (440 Hz) ja B (436 Hz). Ning me mängime neid samaaegselt.

Millise sageduse me kuulame? Mis on löökide sagedus?

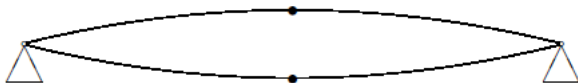
Vastus

$$\sin(440 * 2\pi t) + \sin(436 * 2\pi t)$$

$$2 \sin(438 * 2\pi t) \cos(2 * 2\pi t)$$

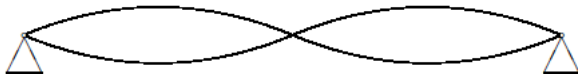
Tajutav sagedus: $A + B/2 = 438$ Hz

Löögid: laine on moduleeritud "aeglase" koosinus-lainega (2Hz), tema vastutab ka löökide eest. Koosinusel on 2 piiki tsükklis, nii et löökide taktisagedus on 4Hz.

Sagedus f 

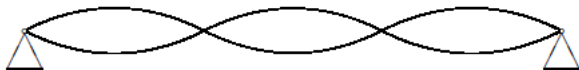
$$y = A \cos \sqrt{k/mt} + B \sin \sqrt{k/mt}$$

kus A ja B on määratud helmesi esialgse positsiooniga ja kiirusega.

Sagedus $2f$ 

$$y = A \cos 2\sqrt{k/mt} + B \sin 2\sqrt{k/mt}$$

kus A ja B on määratud helmesi esialgse positsiooniga ja kiirusega.

Sagedus $3f$ 

$$y = A \cos 3\sqrt{k/mt} + B \sin 3\sqrt{k/mt}$$

kus A ja B on määratud helmesi esialgse positsiooniga ja kiirusega.

Üldine võrrand

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\sqrt{k/mt}) + B_n \sin(n\sqrt{k/mt}))$$

Ehk siis nöö võib korruga võnkuda erinevate sagedustega!

Minidemo

Materjal

- Music: A Mathematical Offering, Dave Benson
- “Fuusikaline maailmapilt”, Põhivara, Kalev Tarkpea

Happy End

Täna tähelepanu eest!

