Matemaatilised alused

Maatriksid ja teisendused

Konstantin Tretjakov (kt@ut.ee)

19. september 2005

Eelmine kord

- Punktid, vektorid, $\mathbb{R}^m$ ja veerumaatriksid.
- Vektorite liitmine: $\mathbf{p} + \mathbf{q}$
  - Punktide nihutamise viis
  - Lineaarsete kombinatsioonide moodustamise viis
- Norm: $\|\mathbf{p}\|$
  - Normeerimine: $\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$
  - Polaarkoordinaadid:
    $p_x = \|\mathbf{p}\| \cos\phi, \quad p_y = \|\mathbf{p}\| \sin\phi$

Eelmine kord

- Skalaarkorrutis: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p}^T \mathbf{q}$
  - Skalaarkorrutis kui projektsioon.
  - Projektor: $\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}^T}{\mathbf{p}^T\mathbf{p}}$
  - Ortogonaalsus: $\mathbf{p}^T \mathbf{q} = 0$
  - Ortogonaliseerimine: Gram-Schmidt, vektorkorrutise abil.
  - Ortonormaalsus, ortogonaalsed maatriksid.

Eelmine kord

- Segakorrutis: $|\mathbf{p}\quad\mathbf{q}|$ $\quad|\mathbf{p}\quad\mathbf{q}\quad\mathbf{r}|$
  - Pindala/ruumala arvutamiseks
  - Punktide orientatsiooni määramiseks
  - Kumeruse kontroll/punkt hulknurgas
- Vektorkorrutis: $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$
  - Normaalide leidmiseks
  - Ortogonaliseerimiseks

Eelmine kord

- Sirge/sirglõiku võrrand:
  - Parameetriliselt:
    - $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}$
    - $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \lambda\mathbf{s}$
  - Ilmutamatult:
    - $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$
    - $n_x x + n_y y + d = 0$

Seekord

- Lineaarteisendused ja maatriksid
- Pööratavus, astak, determinant
- Ortogonaalsed teisendused
- Afiinne ruum, afiinsed teisendused
- Homogeensed koordinaatid

Lineaarteisendused

- Teisendus $f : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ on *lineaarne* ehk *homomorfism* kui

$$f(\alpha\vec{x} + \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

- Lineaarteisendused on: pööre, homoteetia (skaleerimine), *shear*, peegeldus, projektsioon ja kõik nende kombinatsioonid ja summad.
- Nihe *ei ole* lineaarteisendus.

Lineaarteisendused

- Olgu $f : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ lineaarteisendus, ning olgu $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ baas ruumis $\mathcal{V}_1$.
- Vaatleme suvalist vektorit $\vec{x}$. Olgu $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$ vektori $\vec{x}$ koordinaatesitus antud baasis, s.t.:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m$$

- Kuna f on lineaarteisendus siis

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_m f(\vec{e}_m)$$

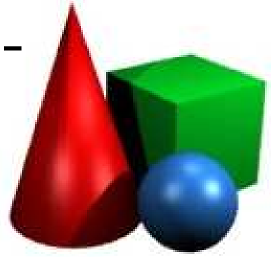
Lineaarteisendused

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_m f(\vec{e}_m)$$

- Seega selleks et *täielikult määrata* teisendust f piisab määrata selle väärtused baasivektorite jaoks.
- Tähistame $\mathbf{F}_{\mathcal{B}}$-ga maatriksit mille veerud on vektorite $f(\vec{e}_i)$ koordinaatesitused (valitud baasis):

$$\mathbf{F}_{\mathcal{B}} = (f_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1), f_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2), \ldots, f_{\mathcal{B}}(\vec{e}_m))$$

- Siis $f_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \mathbf{F}_{\mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$
- $\Rightarrow$ lineaarne teisendus avaldub koordinaatesituses kui korrutis sobiva maatriksiga.



Lineaarteisendused

- Fikseeritud baasi $\mathcal{B}$ korral:
  - Vektorid $\vec{x}$ on samastatavad nende koordinaatesitustega $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$.
  - Lineaarteisendused f on samastatavad nende maatriksitega $\mathbf{F}_{\mathcal{B}}$.
- Edaspidi enamasti oletame et meil on fikseeritud mingi ortonormaalne baas ning ei kasuta alaindekseid. S.t.

$$\vec{x} \approx \mathbf{x}, \quad f \approx \mathbf{F}, \quad f(\vec{x}) \approx \mathbf{F}\mathbf{x} \approx f(\mathbf{x})$$

Lineaarteisendused

- Olgu f, g ja h lineaarteisendused ning $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ ja $\mathbf{H}$ nendele vastavad maatriksid (mingis baasis). Siis
  - Teisenduste kompositsioonile $(g \cdot f)$ vastab maatriksite korrutis: $g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{GFx}$.
  - Teisenduste summale $(f + g)$ vastab maatriksite summa: $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = (\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{x}$.
  - Kompositsioon on assotsiatiivne: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, $(\mathbf{FG})\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{GH})$.
  - Kompositsioon on distributiivne summa suhtes: $(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$, $(\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{H} = \mathbf{FH} + \mathbf{GH}$.

Pööratavus

- Teatavasti funktsioonid võivad olla pööratavad (bijektiivsed) ja mitte. Lineaarfunktsioonide puhul saab mittepööratavust täpsemini kirjeldada.
- Kui $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}), \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ siis $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ kus $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.
- Vektorid, mida f kujutab nullideks moodustavad alamruumi $\mathbb{R}^m$-s. Seda nimetatakse f *nullruumiks* või *tuumaks* ja tähistatakse $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\dim(\mathbb{R}^m) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(f(\mathbb{R}^m))$$

Pööratavus ja astak

- Olgu $\mathbf{F}$ teisendusele f vastav $n \times m$ maatriks.
- Maatriksi $\mathbf{F}$ veerud on baasvektorite kujutised: $f(\mathbf{e}_i)$.
- Seega

$$\dim(f(\mathbb{R}^m)) = \dim(\langle f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_m)\rangle) = \operatorname{rank}(\mathbf{F})\,.$$

- Astak $\operatorname{rank}(\mathbf{F})$ näitab *kui mitu mõõtmeid säilitab teisendus* f.

Pööratavus ja astak

- Vaatleme mingit teisendust $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Talle vastab siis 3×3 maatriks $\mathbf{F}$.
- Kui $\mathrm{rank}(\mathbf{F}) = 3$, siis teisendus on pööratav. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$.
- Kui $\mathrm{rank}(\mathbf{F}) = 2$, siis teisendus kaotab ühte dimensiooni, ehk projitseerib vektoreid kuidagimoodi mingile tasandile. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
- Kui $\mathrm{rank}(\mathbf{F}) = 1$, siis teisendus kaotab kahte dimensiooni, ehk projitseerib vektoreid sirgele.
- Kui $\mathrm{rank}(\mathbf{F}) = 0$, siis f on nullteisendus.

Determinant

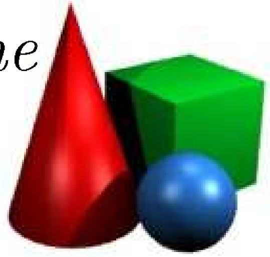
- Nagu te juba teate, determinant on sobiva märgiga pindala/ruumala.
- Seega näitab ta baasivektorite kujutistel konstrueeritud rööpküliku (rööptahuka) pindalat (ruumalat).
- Algsete baasivektorite peal konstrueeritud rööpkülik on ühikruut mille pindala on 1.
- Determinant näitab *ruumi suurendust/vähendust* mida teostab vastav lineaarteisendus, ja seega on mingis mõttes sarnane tuletisega.

Pööratavus ja determinant

- Kui $\operatorname{rank}(\mathbf{F}) < m$ siis pole $\mathbf{F}$ pööratav ning $|\mathbf{F}| = 0$.
- Kui $|\mathbf{F}| = \pm 1$ siis säilitab teisendus f asjade ruumalaid.
- Kui determinant on negatiivne, siis teisendus muudab asjade orientatsiooni.

Ortogonaalsed teisendused

- Eriti olulised on need teisendused mis säilitavad asjade *kuju* (need on parajasti kõik pööred ja peegeldused).
- Sisuliselt tähendab *kuju säilitamine nurkade ja pikkuste säilitamist.*
- Ortonormaalne baas teisendub sel juhul ortonormaalseks baasiks.
- Seega peavad teisenduse maatriksi veerud moodustama ortonormaalse baasi.
- Järelikult $\mathbf{F}^T\mathbf{F} = 1$ ning $\mathbf{F}$ on *ortogonaalne maatriks.*



Punktide vs baasi teisendused

- Igale teisendusele saab vaadata "kahest otsast" – kui punktide teisendusele või kui koordinaadistiku (baasi) teisendusele. Punktide teisendamine funktsiooniga $\mathbf{F}$ on samaväärne koordinaattelgede teisendamisega funktsiooniga $\mathbf{F}^{-1}$.
- Kui me teisendame meie maailmas *punkte* etteantud teisendusega, see ei tähenda et absoluutselt kõik vektorid teisenduvad samamoodi. Vt. näiteks normaalivektoreid.

Näited

Pööre: $$\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Skaleerimine: $$\mathbf{S}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Peegeldus: $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

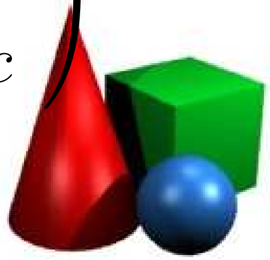
Shear: $$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Näited

Pööre ümber z telje: $$\mathbf{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pööre ümber y telje: $$\mathbf{R}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

3D skaleerimine: $$\mathbf{S}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$



Nihe

- Nihe ei ole lineaarteisendus. Ta kuulub laiema *afiinsete* teisenduste klassi.
- Ruumi $\mathbb{R}^m$ afiinsed teisendused avalduvad kujul:

$$F(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + \mathbf{t} = \mathbf{F}\mathbf{p} + \mathbf{t}$$

  kus f on lineaarteisendus ning $\mathbf{t}$ mingi vektor.
- Selleks et nihet formaalselt käsitleda tuleb defineerida *afiinse ruumi* mõiste.

Afiinne ruum

- $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{P})$ on *afiinne ruum* kui
  - $\mathcal{V}$ on *vektorite* hulk, mis moodustab vektorruumi üle $\mathbb{R}^m$.
  - $\mathcal{P}$ on *punktide* hulk.
  - Liites punktile vektori saab uue punkti: $P + \vec{v} \in \mathcal{P}$

Freim

- Afiinse ruumi $\mathcal{A}$ *baas* (ka *freim*) on paar $(O, \mathcal{B})$, kus
  - $O \in \mathcal{P}$ on freimi algpunkt
  - $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ on vektorruumi $\mathcal{V}$ mingi baas.
- Kui on ruumis valitud freim, saab igat punkti ning igat vektorit esitada koordinaatide abil.

Afiinne teisendus

- Olgu $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — afiinsed ruumid.
- Teisendus $t : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ on *afiinne* kui
  - Ta teisendab punkte punktideks ning vektoreid vektoriteks.
  - Ta on vektorite lineaarteisendus.
  - $F(P + \vec{v}) = F(P) + F(\vec{v})$.

Afiinne teisendus

- Olgu $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ baas 2-mõõtmelises afiinses ruumis.
- Olgu F mingi afiinne teisendus. Siis

$$F(P) = F(O + p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2) = F(O) + p_1F(\vec{e}_1) + p_2F(\vec{e}_2)$$

- $\Rightarrow$ F on täielikult määratud freimi kujutise poolt.
- Olgu $\mathbf{p}$ punkti P koordinaatesitus valitud freimis. Siis

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{t} + \mathbf{F}\mathbf{p}$$

kus $\mathbf{t}$ on $F(O)$ koordinaatesitus.

Homogeensed koordinaadid

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{F}\mathbf{p} + \mathbf{t}, \qquad \mathbf{q} := F(\mathbf{p})$$

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & t_x \\ f_{21} & f_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogeensed koordinaadid

- Kahemõõtmelise afiinse ruumi punkti koordinaatidega (p_x, p_y) esitame kolmemõõtmelise vektorina $(p_x, p_y, 1)^T$.
- Afiinse ruumi vektori koordinaatidega (v_x, v_y) esitame kolmemõõtmelise vektorina $(v_x, v_y, 0)^T$.
- Afiinsed teisendused on esitatavad maatriksitena kujul

$$\left(\begin{array}{cc|c} f_{11} & f_{12} & t_x \\ f_{21} & f_{22} & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Homogeensed koordinaadid

- Analoogselt 3-mõõtmelise ruumi afiinseid teisendusi esitame 4×4 maatriksite abil.
- Näide: teisendus mis pöörab ümber z-telje nurga ϕ võrra ning nihutab mööda x-telje 0.5 võrra.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0.5 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Homogeensed koordinaadid

Pööre: $$\mathbf{R}(\phi) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Skaleerimine: $$\mathbf{S}(a,b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nihe: $$\mathbf{T}(x,y) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Homogeensed koordinaadid

- Primitiivsetest teisendustest saab konstrueerida keerulisemaid korrutades neid kokku.
- Näiteks: 2D pööre kraadi ϕ võrra ümber punkti (c_x, c_y):

$$\mathbf{T}(c_x, c_y)\mathbf{R}(\phi)\mathbf{T}(-c_x, -c_y)$$

OpenGL näide

- Järgmine kood joonistab kolmnurka tippudega $\mathbf{x}_1 = (0,0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (1,0)^T$, $\mathbf{x}_3 = (0,1)^T$:

```
glBegin(GL_TRIANGLES);
  glVertex2f(0.0, 0.0);
  glVertex2f(1.0, 0.0);
  glVertex2f(0.0, 1.0);
glEnd();
```

OpenGL näide

- Järgmine kood joonistab kolmnurka, mis on pööratud 40 kraadi võrra:

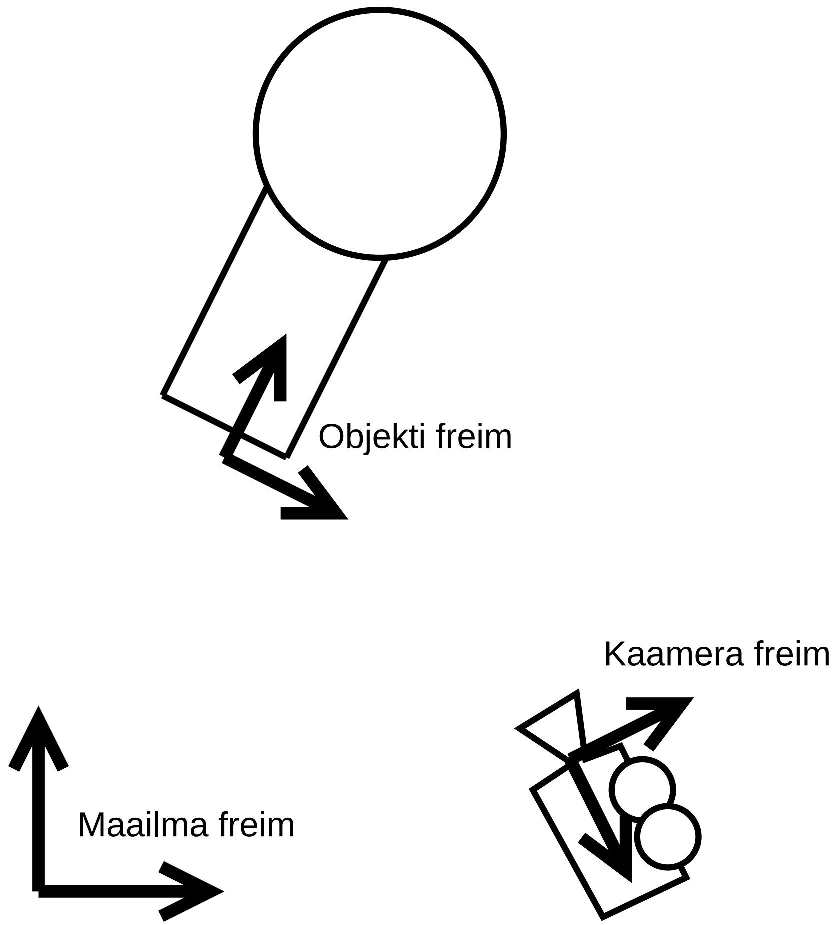
```
glRotatef(40.0, 0.0, 0.0, 1.0);
glBegin(GL_TRIANGLES);
  glVertex2f(0.0, 0.0);
  glVertex2f(1.0, 0.0);
  glVertex2f(0.0, 1.0);
glEnd();
```

OpenGL näide

- Järgmine kood joonistab kolmnurka, mis on pööratud 40 kraadi võrra *ja siis* nihutatud 1 võrra mööda x-telje:

```
glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0);
glRotatef(40.0, 0.0, 0.0, 1.0);
glBegin(GL_TRIANGLES);
  glVertex2f(0.0, 0.0);
  glVertex2f(1.0, 0.0);
  glVertex2f(0.0, 1.0);
glEnd();
```

Maailma/objekti/kaamera freimid



Modeling & view transforms

- Objekt luuakse omas freimis. Objekti asukoha maailmas kirjeldab objekti freimi teisendus $\mathbf{M}$ (*modeling transform*). Seega objekti tipude $\mathbf{x}_i$ koordinaadid maailma freimis on

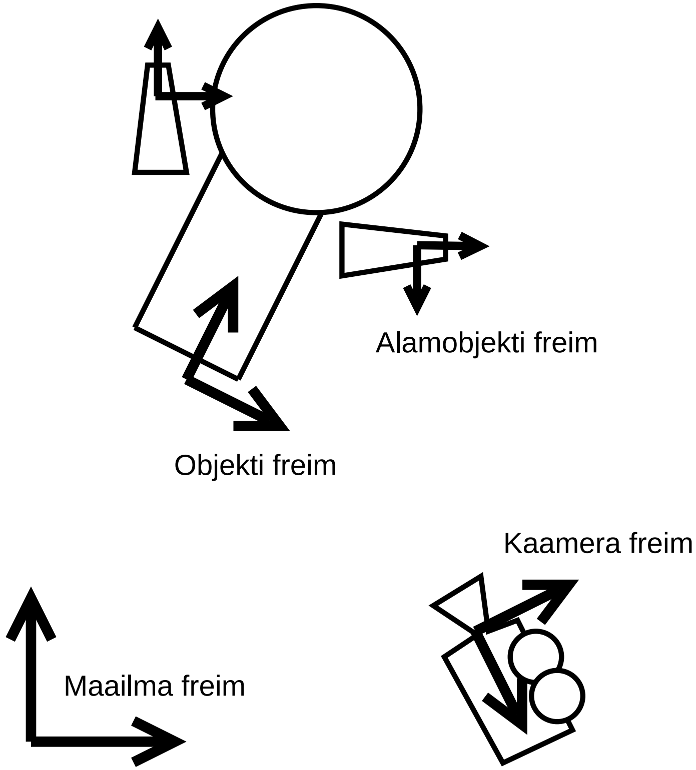
$$\mathbf{M}\mathbf{x}_i$$

- Objekti renderdamiseks teisendatakse teda kaamera koordinaadistikku, kasutades kaamera freimi poolt määratud *kaamera transformatsiooni (view transform)* $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{x}_i$$

Modeling & view transforms

Objekt võib koosneda osadest, ning igat osa on mugav kirjeldada omaette freimis:



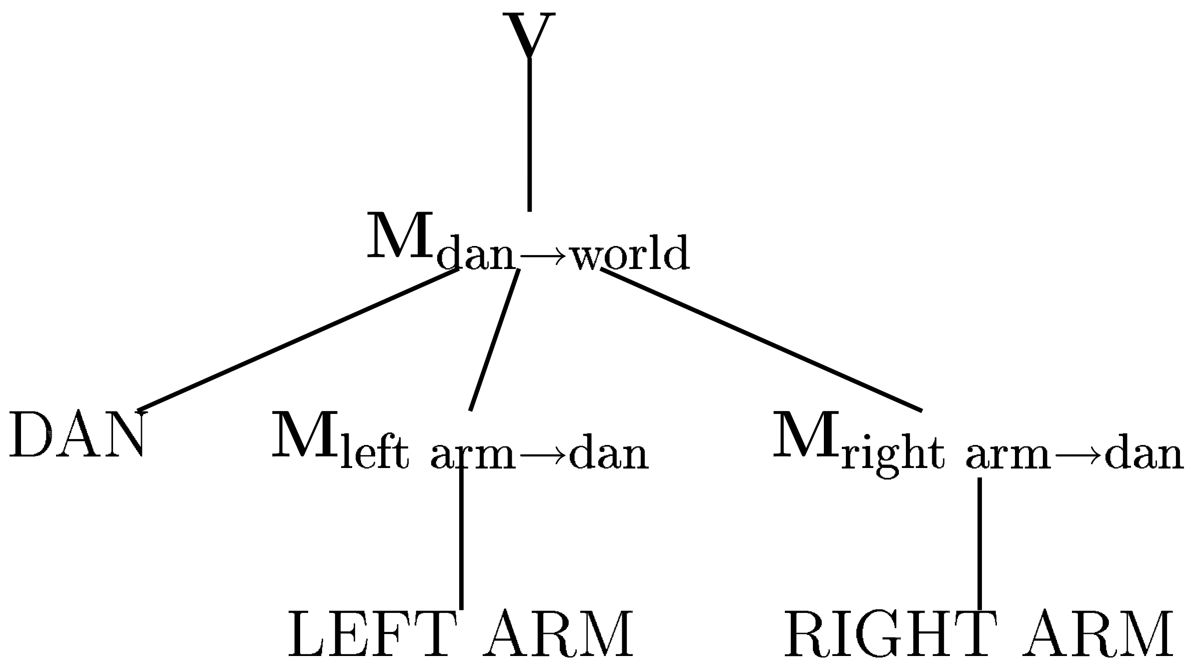
Modeling & view transforms

- Alamobjekte teisendatakse siis alguses nende ülemobjektide freimidesse:
  - Vasak käsi: $\mathbf{M}_{\text{left arm}\to\text{dan}}$
  - Parem käsi: $\mathbf{M}_{\text{right arm}\to\text{dan}}$
- Kogu konstrueeritud objekti teisendatakse maailma freimi: $\mathbf{M}_{\text{dan}\to\text{world}}$
- ... ja siis kaamera freimi: $\mathbf{V}\mathbf{x}_i$
- Seega kokku on *model-view* teisendus vasaku käe jaoks:

$$\mathbf{V}\mathbf{M}_{\text{dan}\to\text{world}}\mathbf{M}_{\text{left arm}\to\text{dan}}\mathbf{x}_i$$

Modeling & view transforms

- Kogu stseen on mugavalt kirjeldatav puuna ning renderdamine on tehtav selle puu läbimisega:



OpenGL näide

```
// View transform
glTranslatef(0.0, 0.0, -5.0);
  // Dan -> world transform
  glRotatef(1.0, 0.0, 0.0, 1.0);
  draw_dan();
  glPushMatrix();
    // Left-arm -> Dan
    glTranslatef(0.0, 0.5, 2);
    glRotatef(0.5, 0.0, 1.0, 0.0);
    draw_left_arm();
  glPopMatrix();
  // ...
```

Projection transform

- Kui kõik tipud on teisendatud kaamera koordinaadistiku, projitseeritakse neid kaamera tasandile ("ekraanile") kasutades *projektsiooni teisendust* **P**:

$$\mathbf{PVMx}_i$$

.

- Sellest siis järgmises loengus.

Küsimused?