Matemaatilised alused

Punktid ja vektorid

Konstantin Tretjakov (kt@ut.ee)

12. september 2005

Eelmine kord

- Arvutigraafika on lahe ja vajalik
- Arvutigraafika põhiülesanne on piltide sünteesimine
- Arvutigraafika põhiteemad: modelleerimine, animatsioon, rendering
- Graafika variatsioonid: fotorealistiline/mitte, kiire/ilus, 2D/3D

Eelmine kord

- Graafika jaoks tehakse spetsiaalselt riistvara, ilma milleta Doom III tööle ei lähe
- "Tavalise" 3D renderingu algoritmi sammud moodustavad nn. "graafika konveieri" (*graphics pipeline*).
  - Vertex transform, culling & clipping, rasterization, shading, visibility tests & blending.

Seekord

- Punktid ja vektorid
- Skalaarkorrutis, segakorrutis (determinant), vektorkorrutis
- Ortogonaalsus, ortogonaliseerimine
- Orientatsioon

Vektorid ja maatriksid

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponeerimine:	$\mathbf{A}^T$, $\mathbf{x}^T$
Korrutamine:	$\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{w}^T\mathbf{x}$
Arvuga korrutamine:	$\alpha\mathbf{x}$
Liitmine:	$\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$
Vektori norm (pikkus):	$\|\mathbf{x}\|$

Vektorid arvutigraafikas

- Vektorid on graafikas igalpool. Põhiliselt on kasutusel 2-, 3- ja 4-mõõtmelised vektorid.
- Vektoreid esitame *veeru*maatriksitena
- Vektoritena esitatakse punkte ruumis ning ka suundi (kaamerate/valgusallikate orientatsioone)
- Kui vaatleme kahemõõtmelisi vektoreid, tähistame komponente alaindeksitega x ja y, näiteks

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y)^T$$

Vektorite liitmine

- Liitmine $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *nihutab punkti* $\mathbf{p}$ *vektori* $\mathbf{q}$ *võrra*.
- Arvuga korrutamine $\alpha\mathbf{p}$ skaleerib vektori $\mathbf{p}$ vastavalt.
- Vektorite $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ *kumer kombinatsioon* on lineaarne kombinatsioon:

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{p}_n$$

kus

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

Sirglõik ja sirgjoon

- Punkte **p** ja **q** ühendava sirglõiku punktid on parajasti kõik punktide **p** ja **q** kumerad kombinatsioonid.

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{q}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

- Kui võtta maha piirang $0 \leq \lambda \leq 1$, siis saame defineeritud sirge, mis läbib punkte **p** ja **q**:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{q}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sirgjoon

- Teisendame:

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \lambda\mathbf{s}$$

- Sel kujul on see sirge, mis läbib punkti $\mathbf{q}$, ning tema suund on määratud vektori $\mathbf{s}$ poolt.
- Sellist esitust nimetatakse *parameetriliseks*.

Norm

- Vektori $\mathbf{p}$ *norm* $\|\mathbf{p}\|$ on selle vektori pikkus
- $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$
- Normi omadused:
  - $\|\mathbf{p}\| \geq 0$
  - $\|\mathbf{p}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{0}$
  - $\|\alpha\mathbf{p}\| = |\alpha|\|\mathbf{p}\|$
  - $\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{p}\| + \|\mathbf{q}\|$

Norm

- Polaarkoordinaadid:

$$p_x = \|\mathbf{p}\| \cos \phi, \quad p_y = \|\mathbf{p}\| \sin \phi$$

- Vektori $\mathbf{p}$ *normeerimine*:

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$$

Skalaarkorrutis

- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p}^T \mathbf{q} = p_x q_x + p_y q_y$
- $(\alpha \mathbf{p} + \mathbf{q})^T \mathbf{r} = \alpha \mathbf{p}^T \mathbf{r} + \mathbf{q}^T \mathbf{r}$
- $\mathbf{p}^T \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 = \|\mathbf{p}\|^2$
- $\mathbf{p}^T \mathbf{q} = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \cos(\phi_p - \phi_q) \leq \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\|$
- Kui $\|\mathbf{p}\| = 1$ siis

$$\boxed{\mathbf{p}^T \mathbf{q} \text{ on vektori } \mathbf{q} \textit{ projektsiooni pikkus}}$$

Skalaarkorrutis

- Kui $\|\mathbf{p}\| = 1$ siis $(\mathbf{p}^T\mathbf{q})\mathbf{p}$ on vektori $\mathbf{q}$ *projektsioon* vektorile $\mathbf{p}$.
- $(\mathbf{p}^T\mathbf{q})\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{p}^T\mathbf{q}) = (\mathbf{p}\mathbf{p}^T)\mathbf{q}$
  - $\Rightarrow$ maatriksit $\mathbf{p}\mathbf{p}^T$ nimetatakse *projektoriks*.
- Perpendikulaar punktist $\mathbf{q}$ ühikvektorile $\mathbf{p}$ on vektor

$$\mathbf{q} - (\mathbf{p}\mathbf{p}^T)\mathbf{q}\,.$$

Ortogonaalsus

- Vektorid $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ on *ortogonaalsed* parajasti siis kui $\mathbf{p}^T\mathbf{q} = 0$.
- Vektori komplekti ortogonaliseerimine:
  - Moodustagu vektorid $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$ baasi ruumis $\mathbb{R}^m$.
  - Nendest vektoritest saame ortogonaalse baasi $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots\}$ kasutades *Gram-Schmidt*-ortogonaliseerimisalgoritmi.

Gram-Schmidt ortogonaliseerimine

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'^T_1}{\|\mathbf{e}'_1\|^2} \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'^T_1}{\|\mathbf{e}'_1\|^2} \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'^T_2}{\|\mathbf{e}_2\|^2} \mathbf{e}_3$$

$$\ldots$$

Ortonormaalsus

- Ortogonaalseid *ühikvektoreid* nimetatakse *ortonormaalseteks*.
- Vektorid $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ on *ortonormaalsed* kui

$$\mathbf{p}^T\mathbf{q} = 0, \qquad \|\mathbf{p}\|^2 = \mathbf{p}^T\mathbf{p} = 1, \qquad \|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q}^T\mathbf{q} = 1$$

- Kui vektorid $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ on paarikaupa ortonormaalsed ja moodustavad baasi ruumis $\mathbb{R}^m$, siis ütleme et nad moodustavad *ortonormaalse baasi*.

Ortonormaalsus

- Olgu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ ortonormaalne baas. Moodustame maatriksi $\mathbf{A}$, mille veergudeks on vektorid $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2\, \ldots\, \mathbf{e}_m)$$

- Vektorite $\mathbf{e}_i$ ortonormaalsusest järeldub et

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

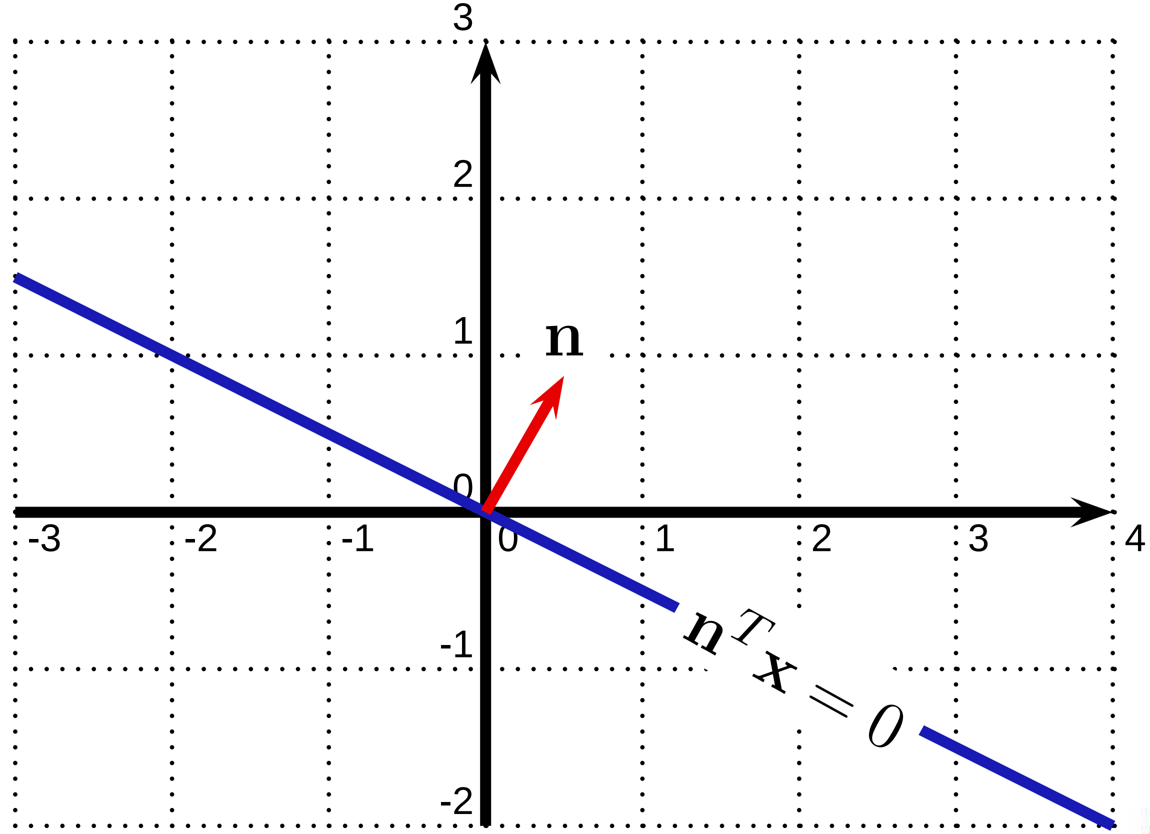
- Selliseid maatrikse nimetatakse *ortogonaalseteks*

Sirge ilmutamatul kujul

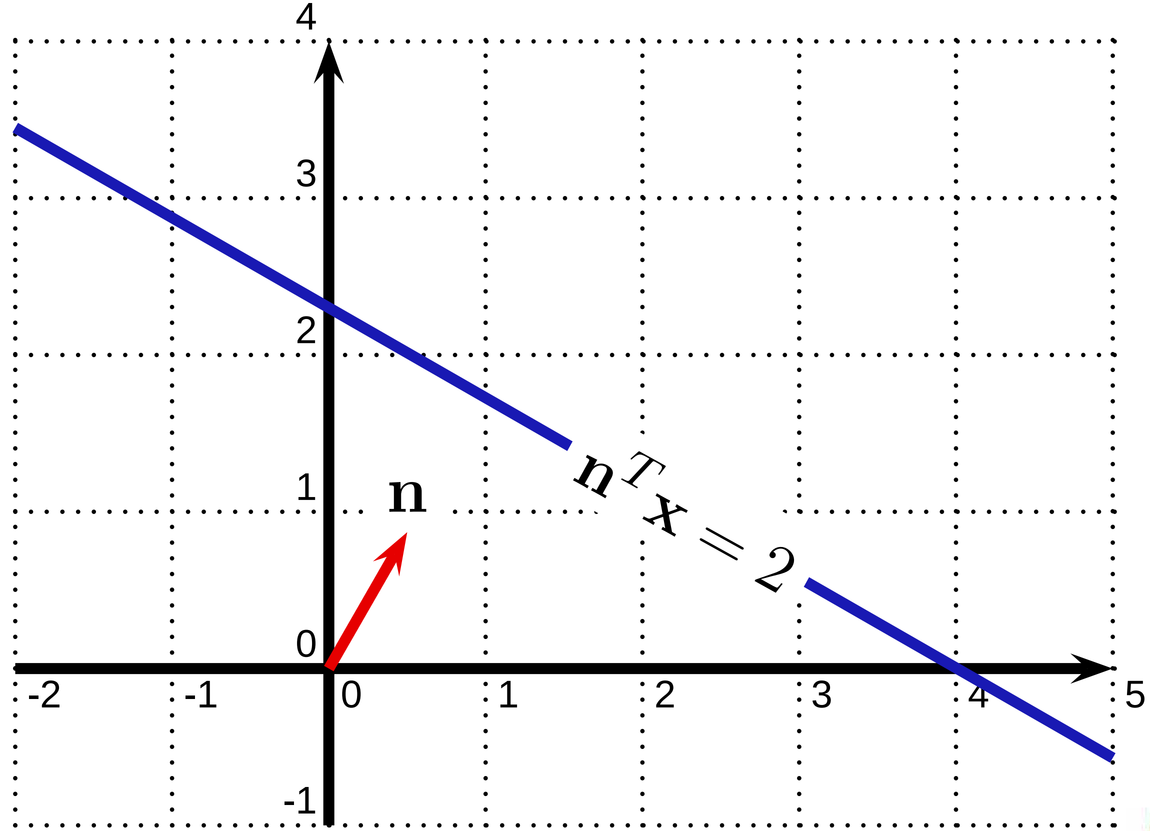
- Etteantud vektoriga $\mathbf{n}$ ortogonaalsete vektorite hulk moodustab sirgjoont.
- Võrrand $\mathbf{n}^T\mathbf{x} = 0$ seega määrab sirget mis läbib punkti $\mathbf{0}$ ning on perpendikulaarne vektoriga $\mathbf{n}$.
- Võrrand $\mathbf{n}^T(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ määrab sirget mis läbib punkti $\mathbf{p}$ ning on vektoriga $\mathbf{n}$ perpendikulaarne.
- Viimast võrrandit tihti kirjutatakse kujul $\mathbf{n}^T\mathbf{x} = \mathbf{n}^T\mathbf{p}$ või siis kujul

$$n_x x + n_y y + d = 0$$

Sirge ilmutamatul kujul



Sirge ilmutamatul kujul



Segakorrutis ehk determinant

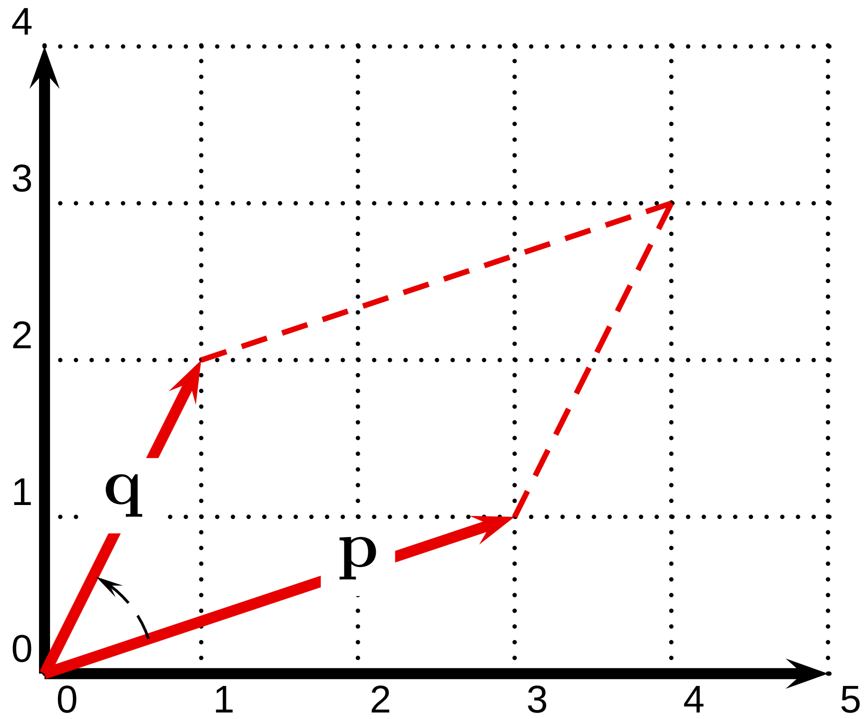
- Olgu $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$. Nende vektorite *segakorrutis* on determinant

$$|\mathbf{p} \quad \mathbf{q}| = \begin{vmatrix} p_x & q_x \\ p_y & q_y \end{vmatrix} = p_x q_y - p_y q_x$$

- Omadused:
  - $|\mathbf{p} \quad \mathbf{q}| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \sin(\phi_q - \phi_p)$
  - $|\mathbf{p} \quad \mathbf{q}| = -|\mathbf{q} \quad \mathbf{p}|$

Segakorrutis kui pindala

- Segakorrutis on vektoritel **p** ja **q** konstrueeritud rööpküliku *pindala sobiva märgiga*.



Segakorrutis kui ruumala

- Kolme 3-mõõtmeliste vektorite $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ puhul on segakorrutis defineeritud samamoodi determinandina:

$$|\mathbf{p} \quad \mathbf{q} \quad \mathbf{r}| = \begin{vmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ p_z & q_z & r_z \end{vmatrix} = \langle \mathbf{p} \times \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$$

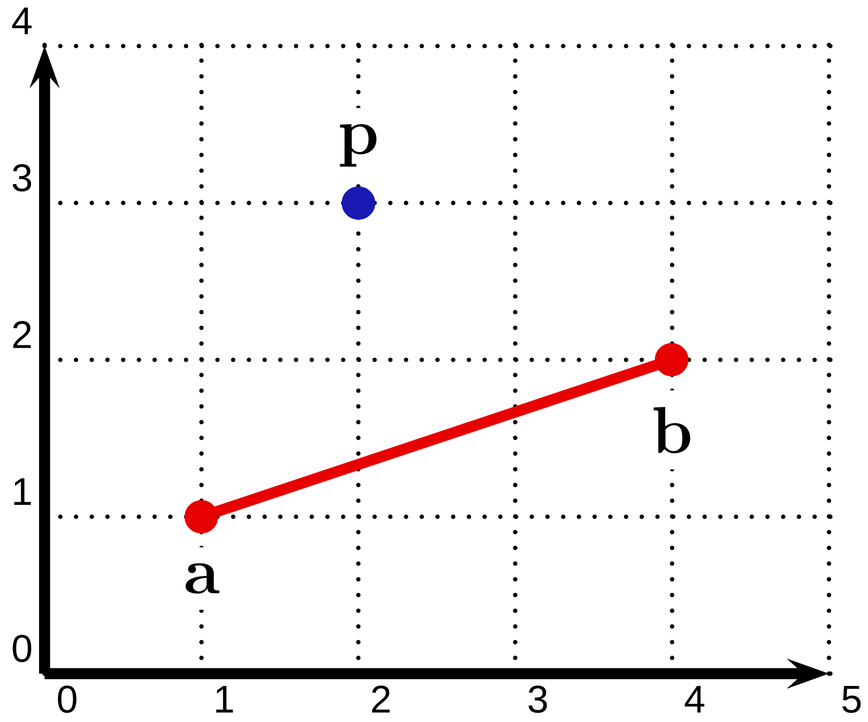
- Ka sel juhul on omadused analoogsed:
  - Segakorrutis on *sobiva märgiga ruumala*
  - Kahe argumendi ümberpaigutus muudab märgi

Orientatsioon

- Kaks ortogonaalset vektorit võib kahemõõtmelises ruumis paigutada kahel viisil, mis erinevad peegelduse võrra.
- Analoogiliselt iga m-mõõtmelise ruumi puhul on (järjestatud) ortogonaalsel baasil olemas *orientatsioon*: paremakäeline või vasakukäeline.
- Traditsiooniliselt matemaatikas valitakse ruumis *paremakäelist* telgede orientatsiooni. Selles baasis esitatud vektorite komplekti segakorrutis on positiivne parajasti siis kui komplekt on ka paremakäeline.

Orientatsioon

- Kuidas otsustada kas punkt $\mathbf{p}$ asub lõigust $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ vasakule või paremale?



Vektorkorrutis

- 3-mõõtmeliste vektorite **p** ja **q** *vektorkorrutis* on vektor

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = (p_y q_z - p_z q_y,\ p_z q_x - p_x q_z,\ p_x q_y - p_y q_x)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

- Vektorkorrutis on määratud *ainult* kõlmemõõtmeliste vektorite jaoks.

Vektorkorrutis

- Vektor $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ on perpendikulaarne nii $\mathbf{p}$ kui ka $\mathbf{q}$-ga.
- Kolmik $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p} \times \mathbf{q})$ on paremakäeline (paremakäelise koordinaadistiku puhul).
- $\|\mathbf{p} \times \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\||\sin\phi|$.

Vektorkorrutis kui lineaarteisendus

- Vektorkorrutist $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ saab esitada vektorile $\mathbf{q}$ vektori $\mathbf{p}$ poolt määratud lineaarteisenduse rakendamisena:

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} .$$

Ortogonaliseerimine, jälle

- Ruumis $\mathbb{R}^3$ paremakäelise baasi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortogonaliseerimist saab teha ka niimoodi:

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3' \times \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1$$

Küsimused?