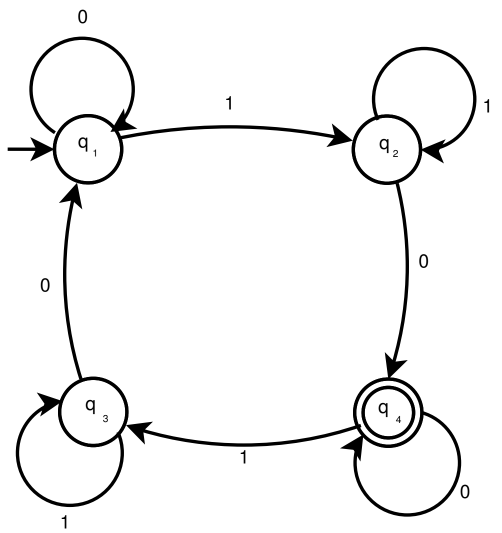
Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

3. kodutöö lahendused

1. Kirjelda järgneva deterministliku lõpliku automaadi $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ kõiki komponente Q, Σ, δ, q_0 ja F. Mis keelt automaat $\mathcal{M}$ ära tunneb?



Lahendus. Automaadid komponendid on järgmised: $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_4\}$ ja δ on määratud tabeliga

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_4	q_2
q_3	q_1	q_3
q_4	q_4	q_3

Esimest korda jõuab automaat aktsepteerivasse olekusse q_4 siis, kui on lugenud sõnes ploki $11\ldots10$ (sellele eelnevad nullid pole olulised). Teist korda jõuab automaat olekusse q_4 siis, kui on sõnes lugenud veel kaks sellist plokki. Seega tunneb automaat ära parajasti kõik sõned, mis sisaldavad paaritu arvu plokke $11\ldots10$ ehk, mis on sama, parajasti kõik sõned, mis sisaldavad paaritut arvu alamsõnesid 10.

2. Olgu $\boldsymbol{z} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ antud kahendprefiks ja olgu $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) Konstrueeri deterministlik lõplik automaat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, mis aktsepteerib keelt $\mathcal{L}$, mis koosneb kõigist sõnedest, mis algavad prefiksiga $\boldsymbol{z}$.

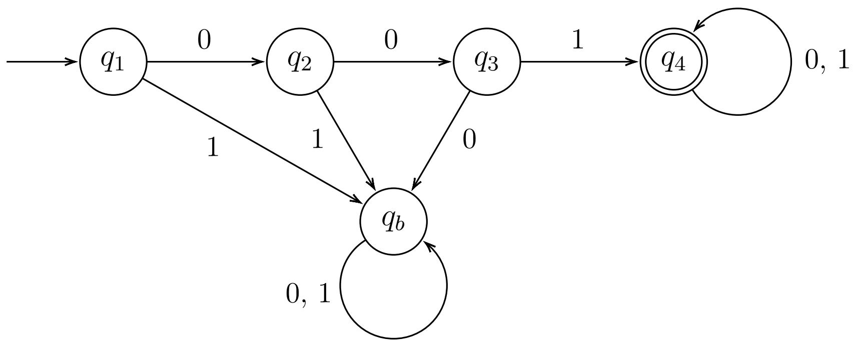
(b) Konstrueeri deterministlik lõplik automaat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, mis aktsepteerib keelt $\mathcal{L}$, mis koosneb kõigist sõnedest, mis algavad ükskõik millise prefiksiga, välja arvatud $\boldsymbol{z}$.

Kummaski osas kirjelda kõiki komponente Q, Σ, δ, q_0 ja F.
<u>Juhis:</u> proovi alguses võtta mõni konkreetne $\boldsymbol{z}$, näiteks $\boldsymbol{z} = (001)$, ja lahendada ülesanne selle $\boldsymbol{z}$ jaoks. Kuidas saab seda lahendust üldistada suvalisele $\boldsymbol{z}$-le?

Lahendus. (a) Sellise automaadi võime konstrueerida järgmise ideega: sisendsõnest iga järjekordse sümboli lugemisel siirdub automaat kas järgmisse uude olekusse, kui sümbol võrdub prefiksis $\boldsymbol{z}$ vastaval kohal asuva sümboliga, või mitteaktsepteerivasse olekusse, kui ei võrdu. Kui sisendsõnest on kõik sümbolid loetud, siis sõltumata järgmistest sümbolitest jääb pidama viimasesse olekusse, mis on ühtlasi ka aktsepteeriv olek.

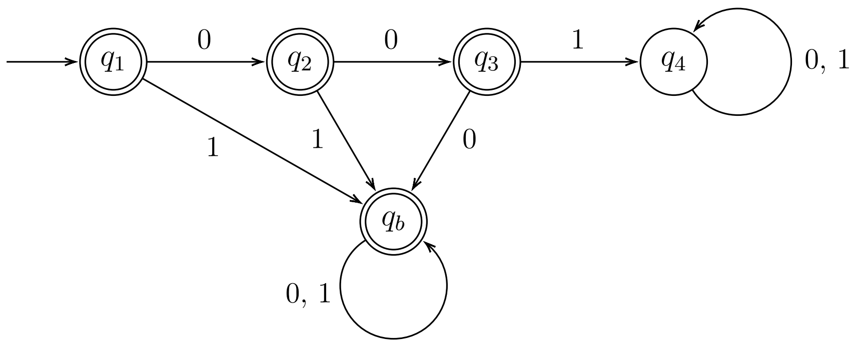
Olgu automaadi olekute hulk $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{m+1}, q_b\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, algolek q_1, aktsepteerivate olekute hulk $F = \{q_{m+1}\}$ ning üleminekufunktsioon δ määratud seostega: iga $i = 1, \dots, m$ korral $\delta(q_i, y_i) = q_{i+1}$ ja $\delta(q_i, 1-y_i) = q_b$ ning $\delta(q_{m+1}, 0) = \delta(q_{m+1}, 1) = q_{m+1}$, $\delta(q_b, 0) = \delta(q_b, 1) = q_b$. See automaat aktsepteerib ainult niisugust sõnet, mille puhul automaat läbib töö alguses edukalt kõik olekud $q_1, \dots, q_m$.

Näiteks prefiksi $\boldsymbol{z} = (001)$ puhul saame sellise automaadi:



(b) Muudame esimese osa automaadis aktsepteeriva oleku mitteaktsepteerivaks ja mitteaktsepteerivad olekud aktsepteerivateks. Saadud automaat aktsepteerib sõnet siis, kui esialgne automaat seda ei aktsepteeri, ja vastupidi. Kõik komponendid peale F on samad ning $F = Q \setminus \{q_{m+1}\}$.

Näiteks prefiksi $\boldsymbol{z} = (001)$ puhul saame sellise automaadi:



3. Defineerime kahe keele $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ sümmeetrilise vahe $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ järgmiselt:

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \{\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \text{ kuulub täpselt ühte keelde } \mathcal{L}_1 \text{ või } \mathcal{L}_2\}.$$

Tõesta, et kui $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ on regulaarsed keeled tähestikus Σ, siis ka $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ on regulaarne keel sellessamas tähestikus.
Näide: kui $\mathcal{L}_1 = \{001, 110, 11\}$ ja $\mathcal{L}_2 = \{110, 00\}$, siis $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \{001, 11, 00\}$.
Juhis: loengus tõestasime, et $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ on regulaarne. Mõtle, kuidas seda tõestust muuta.

Lahendus 1. Võtame eeskujuks loengu 5 teoreemi tõestuse. Kui $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ on regulaarsed keeled, siis leiduvad automaadid $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ ja $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, mis vastavalt neid keeli aktsepteerivad. Defineerime automaadi $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
- Σ on sama tähestik.
- Üleminekufunktsiooni määrame seostega: iga $(r_1, r_2) \in Q$, $a \in \Sigma$ korral $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$.
- Algolek on $q_0 = (q_1, q_2)$.
- Aktsepteerivate olekute hulk on

  $$F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \,\&\, r_2 \notin F_2 \vee r_1 \notin F_1 \,\&\, r_2 \in F_2\}$$

  (ainuke erinevus loengu 5 teoreemi tõestusest).

Konstrueeritud automaat $\mathcal{M}$ lõpetab sõnel $\boldsymbol{w}$ töö aktsepteerivas olekus parajasti siis, kui pärast sõne $\boldsymbol{w}$ läbimist asub täpselt üks automaatidest $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ aktsepteerivas olekus. Järelikult aktsepteerib $\mathcal{M}$ kõiki keelde $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ kuuluvaid sõnesid ja ainult neid.

Lahendus 2. Loengus 5 on tõestatud, et kahe regulaarse keele ühend on regulaarne. On ka selge, et regulaarse keele täiend on regulaarne, sest täiendit tunneb ära automaat, kus esialgse automaadiga võrreldes on kõik aktsepteerivad olekud muudetud mitteaktsepteerivateks ja vastupidi.

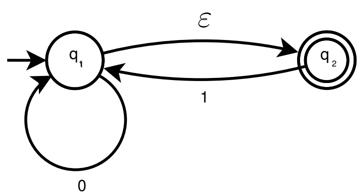
Kuna

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = (\mathcal{L}_1 \cap \overline{\mathcal{L}_2}) \cup (\overline{\mathcal{L}_1} \cap \mathcal{L}_2) = \overline{(\overline{\mathcal{L}_1} \cup \mathcal{L}_2)} \cup \overline{(\mathcal{L}_1 \cup \overline{\mathcal{L}_2})},$$

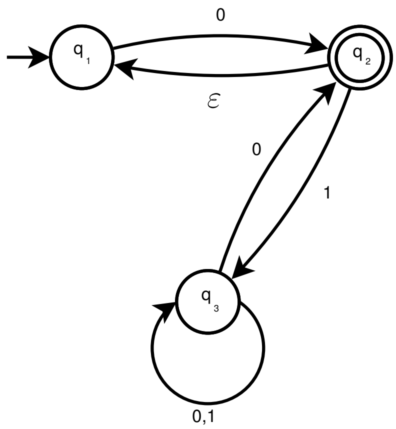
siis on ka keel $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ regulaarne, sest viimases avaldises on iga tehte tulemus regulaarne keel.

4. (a) Kirjelda kummagi järgneva mittedeterministliku lõpliku automaadi $\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ kõiki komponente Q, Σ, δ, q_0 ja F. Mis keelt kumbki automaat $\mathcal{N}$ ära tunneb?

(b) Teisenda kumbki mittedeterministlik lõplik automaat ekvivalentseks deterministlikuks automaadiks.



(i)



(ii)

Lahendus. (a) Automaadi (i) komponendid on: $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_2\}$ ja δ on

	0	1	ε
q_1	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$

Automaat tunneb ära kõiki kahendsõnesid.

Automaadi (ii) komponendid on: $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $q_0 = q_1$, $F = \{q_2\}$ ja δ on

	0	1	ε
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_1\}$
q_3	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

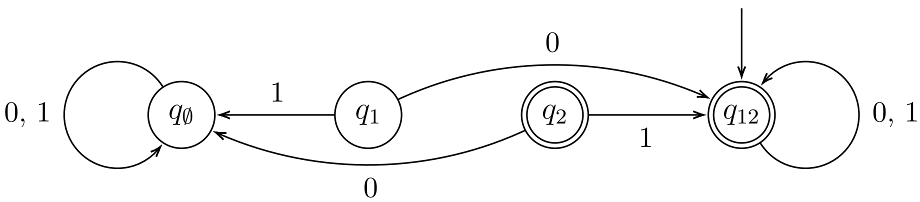
Automaat tunneb ära kõiki sõnesid, mis algavad ja lõpevad nulliga, sest olekust q_1 pääseb välja ainult sümboliga 0 ja olekusse q_2 pääseb sisse ainult sümboliga 0. Alamsõne, mis jääb algava 0 ja lõppeva 0 vahele, võib olla suvaline, samuti võivad algav 0 ja lõppev 0 omavahel kokku langeda.

(b) Võtame eeskujuks 6. nädala praktikumiülesande 1, mis toetub 6 nädala loengu teoreemi tõestusele.

Joonisel (i) kujutatud mittedetermineeritud lõplikule automaadile vastava determineeritud automaadi olekute hulk on $\{q_\emptyset, q_1, q_2, q_{12}\}$, tähestik $\{0, 1\}$, algolek q_{12} (sest esialgses automaadis väljub algolekust ε-kaar), aktsepteerivate olekute hulk $\{q_2, q_{12}\}$ ja üleminekufunktsioon

	0	1
$q_\emptyset$	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$
q_1	q_{12}	$q_\emptyset$
q_2	$q_\emptyset$	q_{12}
q_{12}	q_{12}	q_{12}

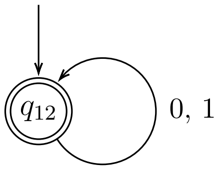
Välja näeb see automaat selline:



Kuna selles automaadis pole võimalik liikuda lähteolekust q_{12} teistesse olekutesse, siis võime kõik ülejäänud olekud ära jätta. Sellega saame automaadi, mille olekute hulk on $\{q_{12}\}$, tähestik $\{0, 1\}$, algolek q_{12}, aktsepteerivate olekute hulk $\{q_{12}\}$ ja üleminekufunktsioon

	0	1
q_{12}	q_{12}	q_{12}

Selle automaadi olekudiagramm on



See automaat aktsepteerib kõiki sõnesid, nagu lihtne näha.

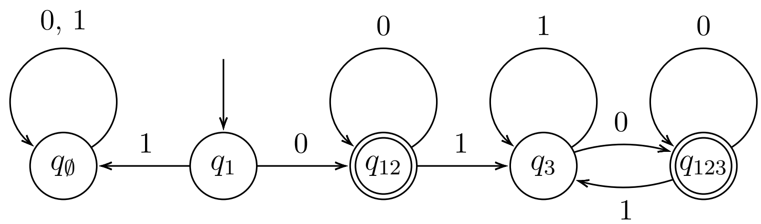
Joonisel (ii) kujutatud automaadile vastab mittedeterministlik automaat, mille olekute hulk on $\{q_\emptyset, q_1, q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{123}\}$, tähestik $\{0, 1\}$, algolek q_1, aktsepteerivate olekute hulk $\{q_2, q_{12}, q_{23}, q_{123}\}$ ja üleminekufunktsioon:

	0	1
$q_\emptyset$	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$
q_1	q_{12}	$q_\emptyset$
q_2	$q_\emptyset$	q_3
q_3	q_{123}	q_3
q_{12}	q_{12}	q_3
q_{13}	q_{123}	q_3
q_{23}	q_{123}	q_3
q_{123}	q_{123}	q_3

Siin on samuti mõned olekud, kuhu algolekust ei pääse ning mille võib seetõttu ära jätta. Algolekust q_1 saab minna olekutesse q_{12} ja $q_\emptyset$. Olekust q_{12} saab minna olekusse q_3. Olekust q_3 saab minna olekusse q_{123}. Rohkematesse olekutesse neist olekutest minna ei saa. Jätame seega olekud q_2, q_{13}, q_{23} ära ja saame automaadi: olekute hulk on $\{q_\emptyset, q_1, q_{12}, q_3, q_{123}\}$, tähestik $\{0, 1\}$, algolek q_1, aktsepteerivate olekute hulk $\{q_{12}, q_{123}\}$ ja üleminekufunktsioon

	0	1
$q_\emptyset$	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$
q_1	q_{12}	$q_\emptyset$
q_3	q_{123}	q_3
q_{12}	q_{12}	q_3
q_{123}	q_{123}	q_3

See automaat näeb välja selline:



Võib kontrollida, et see automaat tõepoolest aktsepteerib parajasti neid kahendsõnesid, mis algavad ja lõpevad nulliga.