Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2015

Kontrolltöö lahendused

1. Tudeng läks raamatukokku. Raamatukogus on 100 erineva pealkirjaga raamatuid. (Kõik sama pealkirjaga raamatud eeldatakse olevat identsed.)

(a) Kui tudeng peab valima viis *erinevat* raamatut, siis kui palju valikuvõimalusi tal on?

15 tudengist koosnev rühm arvutiteaduse instituudist läks raamatukokku ja üheskoos laenutasid nad 5 raamatut „Sissejuhatus kombinatoorikasse“, 7 raamatut „Sissejuhatus algoritmiteooriasse“ ja 3 raamatut „Kuidas hästi eksameid teha“.

(b) Kui palju on võimalusi jaotada raamatud tudengite vahel nii, et iga tudeng saaks vähemalt ühe raamatu?

„Harry Potter ja Fööniksi ordu“ on väga populaarne raamat. 10 tudengist koosnev rühm läks raamatukokku ja üheskoos laenutasid nad 25 raamatut „Harry Potter ja Fööniksi ordu“.

(c) Kui palju on võimalusi jaotada raamatud tudengite vahel?

(d) Sama nagu (c), aga lisaks tingimusel, et iga tudeng saab vähemalt ühe raamatu. Kui palju on võimalusi jaotada raamatud tudengite vahel?

(e) Sama nagu (c), aga lisaks tingimusel, et ükski tudeng ei saa rohkem kui 10 raamatut. Kui palju on võimalusi jaotada raamatud tudengite vahel?

Lahendus. (a) Tudeng peab valima 100 pealkirja hulgast 5 pealkirja. Selleks on $\binom{100}{5}$ võimalust.

(b) Raamatuid on kokku sama palju kui tudengeid. Paneme tudengid mingil viisil, näiteks nimede järgi ühte ritta. Raamatute jaotamiseks moodustame raamatutest järjestuse ja anname igale tudengile sealt järjest ühe raamatu. Jaotamisvõimalusi on sama palju, kui palju saab 5 ühte, 7 teist ja 3 kolmandat liiki raamatust järjestusi moodustada ehk

$$\frac{15!}{5!\,7!\,3!} = 360\,360.$$

(c) Valime 10 erinevast elemendist välja 25 nii, et kordumised on lubatud. Iga tudeng saab nii mitu raamatut, kui mitu korda talle vastav element valikus esineb. Võimalusi on $\left(\!\binom{10}{25}\!\right) = \binom{34}{25}$.

(d) Anname kõigepealt igale tudengile ühe raamatu, sellega on kindlustatud, et iga tudeng saab vähemalt ühe raamatu. Ülejäänud raamatute jaotamiseks valime 10 erinevast elemendist välja 15 ning anname igale tudengile nii mitu raamatut, kui mitu korda talle vastav element valikus esineb. Ülesande vastus on $\left(\!\binom{10}{15}\!\right) = \binom{24}{15}$.

(e) Defineerime omadused P_i = „tudeng i saab rohkem kui 10 raamatut“, $i = 1, \ldots, 10$. Siis elimineerimisvalemis

- $W(0) = \left(\!\binom{10}{25}\!\right)$, sest siin lihtsalt jaotame 10 tudengi vahel 25 raamatut;
- $W(1) = \binom{10}{1}\left(\!\binom{10}{14}\!\right)$, sest siin valime välja ühe tudengi ja anname talle 11 raamatut ning seejärel jaotame 10 tudengi vahel ülejäänud 14 raamatut;
- $W(2) = \binom{10}{2}\left(\!\binom{10}{3}\!\right)$, sest valime välja kaks tudengit, kellele kummalegi anname 11 raamatut, ning seejärel jaotame 10 tudengi vahel ülejäänud 3 raamatut;
- $W(3) = \ldots = W(10) = 0$.

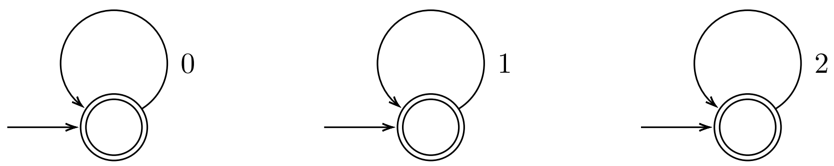
Elimineerimisvalemi põhjal saame vastuseks $E(0) = W(0) - W(1) + W(2) = \left(\!\binom{10}{25}\!\right) - \binom{10}{1}\left(\!\binom{10}{14}\!\right) + \binom{10}{2}\left(\!\binom{10}{3}\!\right) = 44\,289\,256$.

2. Kasutades tunnis käsitletud meetodit, konstrueeri mittedeterministlik automaat, mis aktsepteerib järgmise regulaaravaldisega kirjeldatud keelt, kus $\Sigma = \{0, 1, 2\}$:

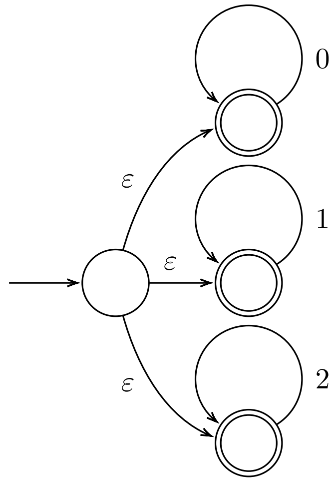
$$(0^* \cup 1^* \cup 2^*)(012)\ .$$

Esita kõik algoritmi vahesammud.

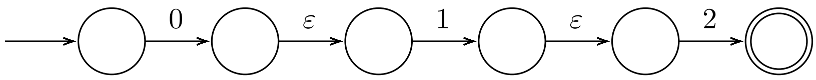
Lahendus. Regulaaravaldistele 0^*, 1^* ja 2^* vastavad automaadid



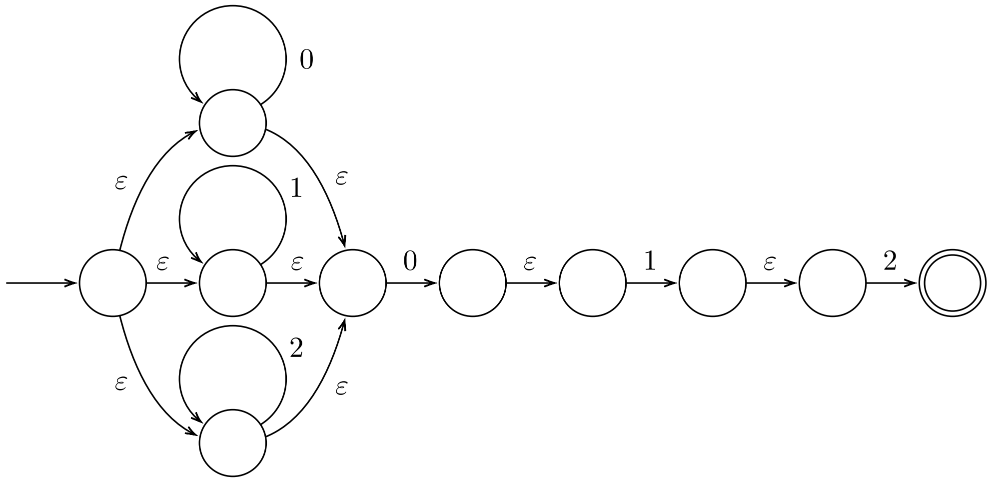
Regulaaravaldisele $0^* \cup 1^* \cup 2^*$ vastab automaat



Regulaaravaldisele 012 vastab automaat



Regulaaravaldisele $(0^* \cup 1^* \cup 2^*)(012)$ vastab automaat



3. Definitsioon. Sõne w prefiks on alamsõne, mis esineb sõne w alguses.
Näide. Alamsõned ε, 0, 00 ja 001 on kõik sõne 001 prefiksid. Seevastu 1 ei ole sõne 001 prefiks.

Olgu $\Sigma = \{0, 1\}$ tähestik.

(a) Olgu $\mathcal{R}$ regulaarne keel. Kas järgmine keel on regulaarne või mitte? Põhjenda vastust.

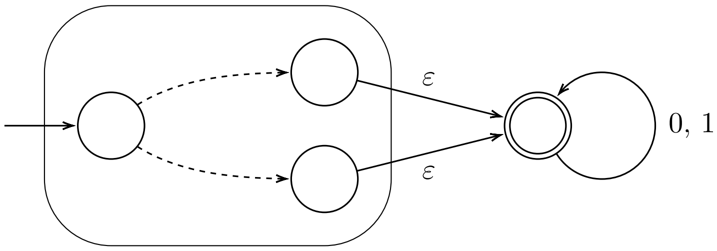
$$\mathcal{L}_R = \left\{ w \;\middle|\; w \in \{0,1\}^* \text{ on sõne, mis sisaldab prefiksit } z \in \mathcal{R} \right\} .$$

(b) Olgu $\mathcal{N}$ mitteregulaarne keel. Kas järgmine keel on alati mitteregulaarne? Põhjenda vastust.

$$\mathcal{L}_N = \left\{ w \;\middle|\; w \in \{0,1\}^* \text{ on sõne, mis sisaldab prefiksit } z \in \mathcal{N} \right\} .$$

Lahendus. (a) Jah. Et $\mathcal{L}_R = \mathcal{R} \circ \{0,1\}^*$, siis $\mathcal{L}_R$ on regulaarne, sest keel $\mathcal{R}$ on regulaarne eelduse põhjal ja keel $\{0,1\}^*$ kui kõigi sõnede hulk on samuti regulaarne (nt 3. kodutöö ülesande 4 järgi).

Teine lähenemisviis. Et $\mathcal{R}$ on regulaarne keel, siis leidub mittedeterministlik lõplik automaat $\mathcal{M}_R$, mis tunneb ära keelt $\mathcal{R}$. Siis keelt $\mathcal{L}_R$ tunneb ära järgmine mittedeterministlik lõplik automaat:



$\mathcal{M}_R$

(b) Ei. Olgu $\mathcal{N} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. See keel on mitteregulaarne 8. loengu põhjal. Et keel $\mathcal{N}$ sisaldab tühisõnet ε, mis on vastavalt antud definitsioonile iga kahendsõne prefiks, siis $\mathcal{L}_N = \{0,1\}^*$ ehk kõigi kahendsõnede hulk. See keel on regulaarne.

4. Olgu $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ tähestik.

(a) Kas järgmine keel on regulaarne? Põhjenda vastust.

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ w\#a \;\middle|\; \begin{array}{l} w \in \{0,1\}^*, a \in \{0,1\}, \\ \qquad w \text{ on sõne, mis algab sümboliga } a \end{array} \right\} .$$

(b) Tõesta, et järgmine keel ei ole regulaarne:

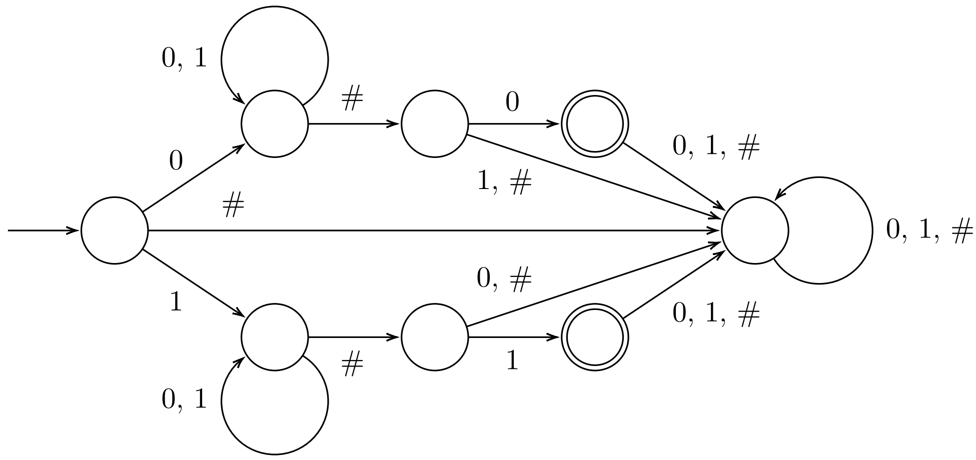
$$\mathcal{L}_2 = \left\{ w\#z \;\middle|\; \begin{array}{l} w, z \in \{0,1\}^* \text{ on kaks sõnet} \\ \qquad \text{ning } z \text{ on sõne } w \text{ prefiks} \end{array} \right\} .$$

Lahendus. (a) Jah. Keelt kirjeldab regulaaravaldis

$$\big(0(0 \cup 1)^*\#0\big) \cup \big(1(0 \cup 1)^*\#1\big).$$

Järelikult keel on regulaarne.

Võime ka esitada deterministliku lõpliku automaadi, mis seda keelt ära tunneb:



See automaat vaatab, kas sisendsõne esimene sümbol on 0 või 1 ning läheb vastavasse harusse. Kummaski harus loeb sisendsõne läbi ning vaatab, kas sümboli # järel lõpeb sõne sama sümboliga nagu vastavas harus vaadeldakse.

(b) Oletame, et keel $\mathcal{L}_2$ on regulaarne. Olgu p pumpamislemmast saadav positiivne täisarv. Vaatleme sõnet $s = 0^p\#0^p$. Siis $s \in \mathcal{L}_2$ ja $|s| \geq p$. Järelikult $s = xyz$, kus iga $i \geq 0$ puhul $xy^iz \in \mathcal{L}_2$ ning $|y| > 0$ ja $|xy| \leq p$. Viimase võrratuse tõttu koosneb sõne y ainult nullidest. Nüüd aga $xz \notin \mathcal{L}_2$, sest selles sõnes on sümbolist # vasakul vähem kui p nulli. Seetõttu ei saa vasaku osa prefiks olla 0^p. Vastuolu pumpamislemmaga. Järelikult ei ole keel $\mathcal{L}_2$ regulaarne.