Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2015

Kontrolltöö lahendused

1. Filmifestivalil on 7 erinevat filmi, iga filmi näidatakse erineval päeval.

(a) Robert on suur kinofänn ja tahaks vaadata kõiki filme. Kuid kuna ta on vaene tudeng, siis lubab tema eelarve osta ainult 5 piletit (ja sedagi üliõpilase soodustusega!). Aita Robertil kokku lugeda, mitu võimalust on valida 7 filmist välja 5 filmi.

(b) Martin tahab valida vaatamiseks ükskõik millise arvu filme (st Martin võib valida mitte ühtegi filmi või mingi ühe filmi või mingid kaks filmi või mingid kolm filmi või ... või kõik seitse filmi). Mitu võimalust selleks on?

(c) 14 tudengist koosnev rühm tahab vaadata filme. Iga tudeng valib mistahes arvu filme. Tudengite valikud on üksteisest sõltumatud. Mitu võimalust selleks on?

(d) 14 tudengist koosnev rühm tahab vaadata filme nii, et iga filmi vaatab täpselt kaks tudengit. Mitu võimalust selleks on?

(e) 14 tudengist koosnev rühm tahab vaadata filme. Iga tudeng valib 3 filmi. Lisaks on teada, et iga filmi vaatab vähemalt üks tudeng. Mitu võimalust selleks on?

Lahendus. (a) Et filmid on erinevad, siis tuleb 7-elemendilisest hulgast valida välja 5-elemendiline alamhulk. Seda saab teha $\binom{7}{5}$ viisil.

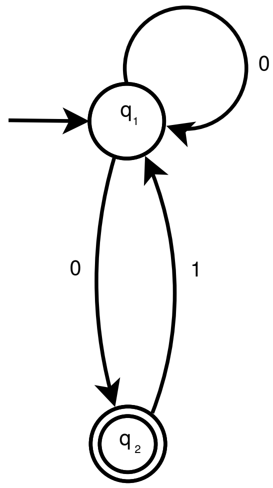
(b) Valida võib suvalise filmide alamhulga. Et 7-elemendilisel hulgal on 2^7 alamhulka, siis see on ka otsitav võimaluste arv.

(c) Eelmise punkti põhjal saab üks tudeng filme valida 2^7 viisil. Et tudengite valikud on üksteisest sõltumatud, siis 14 tudengit saavad filme valida $(2^7)^{14}$ viisil.

(d) Igale filmile saame 2 vaatajat valida $\binom{14}{2}$ viisil. Kokku tuleb teha 7 sellist sõltumatut valikut, seega võimaluste arv on $\binom{14}{2}^7$.

(e) Defineerime omadused $P_i =$ „filmi i ei vaata keegi“, kus $i = 1, \ldots, 7$. Siis elimineerimisvalemis $W(i) = \binom{7}{i}\binom{7-i}{3}^{14}$, sest 7 filmist saab i filmi välja valida $\binom{7}{i}$ viisil, ülejäänud $7 - i$ filmist aga saab üks tudeng valida endale 3 filmi $\binom{7-i}{3}$ viisil ning 14 tudengit igaüks 3 filmi $\binom{7-i}{3}^{14}$ viisil (see kehtib ka $i = 0$ puhul). Seejuures $W(5) = W(6) = W(7) = 0$. Elimineerimisvalemi põhjal saame nüüd, et valimisvõimaluste arv, kus iga filmi vaatab keegi, on $E(0) = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i W(i) = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i \binom{7}{i}\binom{7-i}{3}^{14}$.

2. Teisenda järgmine mittedetermineeritud lõplik automaat ekvivalentseks determineeritud automaadiks. Esita teisendusprotsessi kõik sammud.

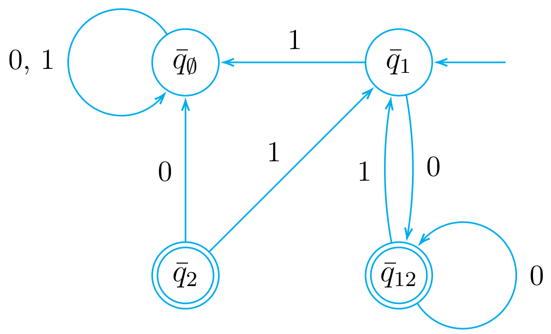


Lahendus. Rakendame protsessi, mida on kirjeldatud 6. nädala loengu teoreemi tõestuses. Olekute hulgaks võtame mittedetermineeritud automaadi olekute hulga kõik alamhulgad: $\{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}\}$, tähistame neid kujul $\{\bar{q}_\emptyset, \bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_{12}\}$. Tähestik on sama nagu esialgsel automaadil ehk $\{0, 1\}$. Üleminekufunktsiooni väärtuse leidmiseks oleku X ja sümboli a puhul vaatame, millise hulga moodustavad esialgses automaadis olekud, kuhu hulga X olekutest viivad kaared märgendiga a. Nii saame tabeli

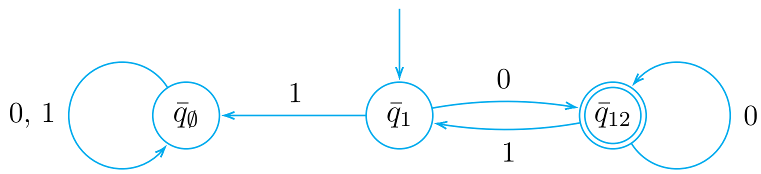
	0	1
$\bar{q}_\emptyset$	$\bar{q}_\emptyset$	$\bar{q}_\emptyset$
$\bar{q}_1$	$\bar{q}_{12}$	$\bar{q}_\emptyset$
$\bar{q}_2$	$\bar{q}_\emptyset$	$\bar{q}_1$
$\bar{q}_{12}$	$\bar{q}_{12}$	$\bar{q}_1$

Automaadi algolek on $\bar{q}_1$. Aktsepteerivate olekute hulga moodustavad kõik olekud, mis sisaldavad esialgse automaadi aktsepteerivat olekut: $\{\bar{q}_2, \bar{q}_{12}\}$.

Selle automaadi olekudiagramm on järgmine:

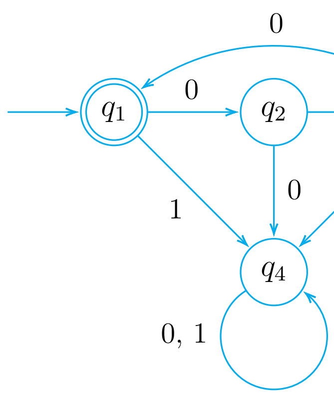


Kuna olek $\bar{q}_2$ on selline, kuhu automaat kunagi sattuda ei saa (seal kaared ainult väljuvad), siis võime soovi korral selle oleku koos seotud kaartega kustutada. Niimoodi saame automaati mõnevõrra lihtsustada:



3. Konstrueeri determineeritud lõplik automaat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, mis tunneb ära keelt, mida kirjeldab regulaaravaldis $(010)^*$. Pane kirja automaadi $\mathcal{M}$ kõik komponendid Q, Σ, δ, q_0 ja F.

Lahendus. Vaatleme automaati



Kui sisendiks on tühisõne, siis peatub automaat aktsepteerivas olekus q_1. Pärast iga ploki 010 lugemist jõuab automaat tagasi olekusse q_1, järelikult aktsepteerib automaat kõiki sõnesid kujul $(010)^*$. Kui mõni sisendsümbolite plokk ei ole kujul 010, siis läheb automaat olekusse q_4 ja jääb sinna kuni sisendi lugemise lõpuni. Seega kõiki ülejäänud sõnesid automaat ei aktsepteeri.

Selle automaadi olekute hulk on $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, tähestik $\Sigma = \{0, 1\}$, üleminekufunktsioon δ

	0	1
q_1	q_2	q_4
q_2	q_4	q_3
q_3	q_1	q_4
q_4	q_4	q_4

algolek $q_0 = q_1$ ja aktsepteerivate olekute hulk $F = \{q_1\}$.

4. Tõesta, et järgmine keel ei ole regulaarne:

$$\mathcal{L} = \{\ 0^m 1^n \mid m \leq 2n + 5,\ m, n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Lahendus. Oletame, et keel on regulaarne. Olgu p positiivne täisarv, mis leidub pumpamislemma põhjal. Vaatleme sõnet $w = 0^p 1^p$. Kuna $p \leq 2p + 5$, siis $w \in \mathcal{L}$. Lisaks $|w| = 2p \geq p$. Järelikult saab selle sõne esitada kujul $w = xyz$ nii, et on täidetud pumpamislemma tingimused: iga $i \geq 0$ korral $xy^i z \in \mathcal{L}$ ning samuti $|y| > 0$ ja $|xy| \leq p$. Viimasest tingimusest järeldub, et y koosneb ainult nullidest ja kõik p ühte jäävad alamsõnesse z. Valime $i = 2p + 6$, millega saame sõne $xy^{2p+6}z$. Siin $|xy^{2p+6}| \geq (2p + 6)|y| \geq 2p + 6$. Järelikult on selles sõnes rohkem kui $2p + 5$ nulli, kuid ainult p ühte. Seega $xy^{2p+6}z \notin \mathcal{L}$. Vastuolu pumpamislemma esimese tingimusega. Järelikult ei saa keel olla regulaarne.