Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2015

Eksami lahendused

1. Millised järgmistest võrdustest on tõesed või väärad? Põhjenda vastuseid.

(a) $n = o(2n+3)$;

(b) $3n^2 = O(n^3)$;

(c) $n + \log_2 n = O(\log n)$.

Lahendus. (a) Väär, sest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

(b) Tõene, sest me võime valida $C = 1$ ja $n_0 = 3$. Siis iga $n > n_0$ puhul $3n^2 < n \cdot n^2 = n^3$.

(c) Väär. Vasakul $\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$. Et erineval alusel logaritmid erinevad vaid kordaja poolest ja kordaja asümptootilist hinnangut ei mõjuta, siis võime lugeda, et $\log n$ on naturaallogaritm. Nüüd l'Hospitali reegli põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \log_2 n}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n \log 2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n + \frac{1}{\log 2} = \infty.$$

Järelikult kasvab vasaku ja parema poole suhe tõkestamatult. Seega iga konstandi $C > 0$ ja iga naturaalarvu n_0 puhul saame leida naturaalarvu $n > n_0$, et $n + \log_2 n \geq C \log n$.

2. Defineerime keele

$$\mathcal{L}^\star = \left\{ \begin{array}{l} \langle A \rangle \mid A \text{ on determineeritud lõplik automaat, mis} \\ \qquad \text{ei aktsepteeri ühtegi sõnet kujul } 0\underbrace{11\cdots1}_{n}0\text{ , kus } n \geq 2 \end{array} \right\}.$$

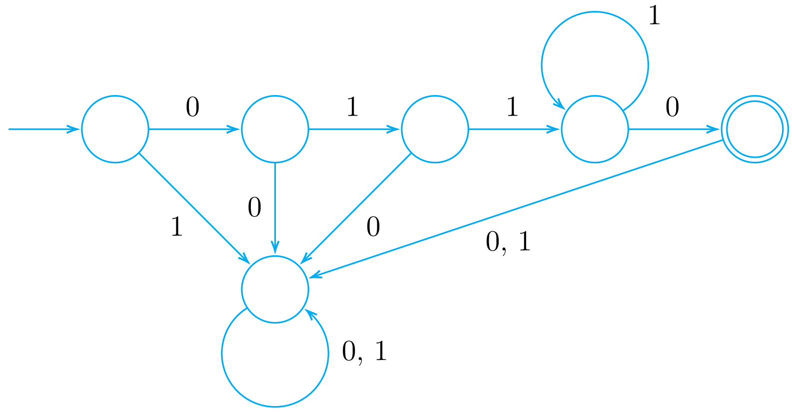
Näita, et $\mathcal{L}^\star$ on lahenduv keel.

Juhis: üks võimalik viis seda ülesannet lahendada on kasutada fakti, et $\mathcal{L}_\varnothing$ on lahenduv keel (näidatud loengus), kus

$$\mathcal{L}_\varnothing = \{\langle A \rangle \mid A \text{ on determineeritud lõplik automaat ja } L(A) = \varnothing\} \ .$$

Vaatleme determineeritud lõplikku automaati B, mis aktsepteerib kõiki sõnesid kujul $0\underbrace{11\cdots1}_{n}0$, kus $n \geq 2$. Miks selline B on olemas? Konstrueeri uus automaat, mis kasutab automaati B.

Lahendus. Konstrueerime determineeritud lõpliku automaadi B, mis aktsepteerib parajasti kõiki sõnesid $0\underbrace{11\cdots1}_{n}0$, kus $n \geq 2$. Selle automaadi olekudiagramm on järgmine:



Kirjeldame Turingi masinat M, mis lahendab keelt $\mathcal{L}^\star$, tegutsedes sisendil $\langle A \rangle$ järgmiselt.

1. Konstrueerib automaadi C, mille puhul $L(C) = L(A) \cap L(B)$. See automaat on sisendautomaadi A ja konstantse automaadi B järgi algoritmiliselt konstrueeritav (vt 3. kodutöö ülesanne 3).

2. Teeb läbi keelt $\mathcal{L}_\varnothing$ lahendava Turingi masina töö sisendil $\langle C \rangle$.

3. Kui see masin lõpetab aktsepteerimisega, siis läheb aktsepteerivasse olekusse; kui aga tagasilükkamisega, siis tagasilükkavasse.

Tõestame, et masin M lahendab keelt $\mathcal{L}^\star$. Kui $\langle A \rangle \in \mathcal{L}^\star$, siis A ei aktsepteeri ühtegi vaadeldava kujuga sõnet, mistõttu $L(A) \cap L(B) = \emptyset$. Järelikult lõpetab keelt $\mathcal{L}_\varnothing$ lahendav masin töö aktsepteerimisega, seega ka masin M lõpetab töö aktsepteerimisega. Kui aga $\langle A \rangle \notin \mathcal{L}^\star$, siis A aktsepteerib vähemalt ühte sellise kujuga sõnet. Sel juhul $L(A) \cap L(B) \neq \emptyset$ ning järelikult lõpetab keelt $\mathcal{L}_\varnothing$ lahendav masin ja ka masin M töö tagasilükkamisega.

3. **<u>Definitsioon:</u>** *viisnurk* on suunamata graaf $\mathcal{H}$, millel on viis tippu v_1, v_2, v_3, v_4 ja v_5, kusjuures neli serva, mis ühendavad tippu v_i tipuga v_{i+1}, $i = 1$, 2, 3, 4, ning serv, mis ühendab tippu v_1 tipuga v_5, kuuluvad kõik graafi $\mathcal{H}$. (Teiste sõnadega, viisnurk on lihttsükkel pikkusega viis.)

Defineerime keele $\mathsf{VIISNURK}$:

$$\mathsf{VIISNURK} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ on suunamata graaf, mis sisaldab viisnurka}\} .$$

Kas $\mathsf{VIISNURK} \in \mathcal{P}$? Põhjenda vastust.

Lahendus. Sisalduvus $\mathsf{VIISNURK} \in \mathcal{P}$ kehtib, sest sisendi $\langle G \rangle$ puhul võime koostada viiekordse tsükli üle graafi G tippude, milles igal sammul kontrollitakse tippude v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 puhul, kas 1) kõik need tipud on erinevad ja 2) leiduvad servad v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1.

Kui graafis leidub viisnurk, siis leitakse see mingil sammul kätte, sest algoritm vaatab kõik tipuviisikud läbi. Kui graafis viisnurka ei leidu, siis ükski viisik ei sobi ja tsükkel töötab lõpuni ilma positiivset tulemust saamata. Seega algoritm on korrektne.

Viiekordse tsükli sisu täidetakse $O(n^5)$ korda, kus n on graafi tippude arv. Tsükli sisus kulub tippude erinevuse ja servade leidumise kontrollimiseks polünomiaalne arv samme. Et polünoomide kompositsioon on polünoom, siis on kirjeldatud algoritmi kogukeerukus polünomiaalne.

4. Defineerime keele $\mathsf{KEHT\text{-}7\text{-}DISJUNKTI}$:

$$\mathsf{KEHT\text{-}7\text{-}DISJUNKTI} = \left\{ \begin{array}{r} \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ on kehtestatav } \mathsf{KNK}\text{-valem, kus} \\ \text{iga muutuja esineb ülimalt 7 disjunktis} \end{array} \right\} .$$

Selles küsimuses näitad, et $\mathsf{KEHT\text{-}7\text{-}DISJUNKTI} \in \mathcal{NP}$-täielik.

(a) Tõesta, et $\mathsf{KEHT\text{-}7\text{-}DISJUNKTI} \in \mathcal{NP}$.

(b) Tõesta, et $\mathsf{KEHT\text{-}7\text{-}DISJUNKTI} \in \mathcal{NP}$-raske.
<u>Juhis:</u> võid keele KEHT (st keele SAT) polünomiaalselt taandada keelele $\mathsf{KEHT\text{-}7\text{-}DISJUNKTI}$. Reduktsioon f konstrueerib antud KNK-valemist ϕ uue KNK-valemi $f(\phi)$, kus iga lausemuutuja esineb ülimalt 7 disjunktis. Ära unusta näidata, et reduktsioon on korrektne ja polünomiaalne.

Lahendus. (a) Vaatleme mittedetermineeritud algoritmi, mis valemi muutujate väärtustuse puhul kontrollib, kas valem on tõene ja et kas iga lausemuutuja esineb ülimalt 7 disjunktis. Kumbki kontrollimine võtab polünomiaalse aja valemi ϕ pikkuse suhtes: piisab lihtsalt valem üks kord algusest lõpuni läbi lugeda, pidades järge valemi seni läbitud osa tõeväärtuse ja iga muutuja disjunktides esinemiste arvu üle.

(b) Taandame keele KEHT polünomiaalselt keelele KEHT-7-DISJUNKTI. Defineerime funktsiooni f, mis tegutseb valemil ϕ järgmiselt: läbib valemi vasakult paremale ja kui leiab mõne muutuja z, mis esineb juba rohkem kui viiendas disjunktis, siis lisab jooksva disjunkti ette valemisse kaks disjunkti $(z \vee \bar{w})$ ja $(\bar{z} \vee w)$, kus w on uus muutuja, ning asendab muutuja z kõik edasised esinemised muutujaga w. Tulemuseks on valem $f(\phi)$, milles iga muutuja esineb ülimalt 7 disjunktis.

Funktsioon f on arvutatav polünomiaalse ajaga valemi ϕ pikkuse suhtes, sest nii disjunktide lisamisoperatsioonide arv kui ka muutujate asendamisoperatsioonide arv on polünomiaalne ϕ pikkuse suhtes.

Kui $\langle\phi\rangle \in$ KEHT, siis leidub valemi ϕ muutujate väärtustus, millel valem ϕ on tõene. Sellel väärtustusel on valemi ϕ kõik disjunktid tõesed. Võttes iga uue muutuja w tõeväärtuse võrdseks temaga seotud vana muutuja z tõeväärtusega, saame, et nii lisatud disjunktid $(z \vee \bar{w})$ ja $(\bar{z} \vee w)$ kui ka muutujate asendamisel saadud disjunktid on kõik tõesed. Järelikult $f(\phi) \in$ KEHT-7-DISJUNKTI. Vastupidi, kui $f(\phi) \in$ KEHT-7-DISJUNKTI, siis valemi $f(\phi)$ muutujate mingil väärtustusel on selle valemi kõik disjunktid tõesed. Sealhulgas on tõesed kõik disjunktid tüüpi $(z \vee \bar{w})$ ja $(\bar{z} \vee w)$. Need aga on korraga tõesed ainult siis, kui z ja w tõeväärtused on võrdsed. Seega kui asendame valemi $f(\phi)$ disjunktides uued muutujad vastavate vanade muutujatega, jääb valemi tõeväärtus ikka tõeseks. Eemaldades lisatud disjunktid, saame tagasi valemi ϕ, mis on sellel väärtustuse tõene. Järelikult $\phi \in$ KEHT.

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et f on keele KEHT polünomiaalne reduktsioon keelele KEHT-7-DISJUNKTI. Et Cooki-Levini teoreemi põhjal on iga keele $L \in \mathcal{NP}$ puhul $L \leq_{\mathrm{P}}$ KEHT ning eeltõestatu põhjal KEHT $\leq_{\mathrm{P}}$ KEHT-7-DISJUNKTI, siis iga keele $L \in \mathcal{NP}$ puhul $L \leq_{\mathrm{P}}$ KEHT-7-DISJUNKTI. Vastavalt definitsioonile on keel KEHT-7-DISJUNKTI seega $\mathcal{NP}$-raske.