Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

19. detsembri eksami lahendused

1. Defineerime keele

$$\mathcal{L}_1 = \{\langle A\rangle \mid A \text{ on deterministlik lõplik automaat ja } A \text{ keel on } (010)^n, n \geq 1\}.$$

Näita, et $\mathcal{L}_1$ on lahenduv keel.

<u>**Juhis:**</u> üks võimalik viis seda ülesannet lahendada on kasutada fakti, et $\mathcal{L}_\varnothing$ on lahenduv keel (näidatud loengus), kus

$$\mathcal{L}_\varnothing = \{\langle A\rangle \mid A \text{ on deterministlik lõplik automaat ja } L(A) = \varnothing\}\ .$$

Vaatleme deterministlikku lõplikku automaati B, mis aktsepteerib kõiki sõnesid, välja arvatud sõned kujul $(010)^n$, $n \geq 1$.

Lahendus. Vaatleme hoopis deterministilikku lõplikku automaati C, mis aktsepteerib kõiki sõnesid kujul $(010)^n$, $n \geq 1$. See automaat on olemas, sest nende sõnede hulka esitab regulaaravaldis $(010)^+$ ning regulaaravaldisega kirjeldatav keel on regulaarne.

Kirjeldame Turingi masinat $\mathcal{M}_1$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_1$. See masin tegutseb sisendil $\langle A\rangle$ järgmiselt.

1. Konstrueerib deterministliku lõpliku automaadi D, mille puhul $L(D) = (L(A) \cap \overline{L(C)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(C))$. See automaat on sisendautomaadi A ja konstantse automaadi C järgi algoritmiliselt konstrueeritav (nt loengu 5 teoreemi tõestuse eeskujul).

2. Teeb läbi keelt $\mathcal{L}_\varnothing$ lahendava Turingi masina töö sisendil $\langle D\rangle$.

3. Kui see masin lõpetab aktsepteerimisega, siis läheb aktsepteerivasse olekusse; kui aga tagasilükkamisega, siis tagasilükkavasse.

Tõestame, et masin $\mathcal{M}_1$ lahendab keelt $\mathcal{L}_1$. Kui $\langle A\rangle \in \mathcal{L}_1$, siis A aktsepteerib kõiki sõnesid kujul $(010)^n$, $n \geq 1$ ehk $L(A) = L(C)$. Seetõttu

$L(A) \cap \overline{L(C)} = \varnothing$ ning $\overline{L(A)} \cap L(C) = \varnothing$, millest $L(D) = \varnothing$. Järelikult lõpetab masin $\mathcal{M}_1$ töö aktsepteerimisega. Kui aga $\langle A \rangle \notin \mathcal{L}_1$, siis $L(A) \neq L(C)$, mistõttu $L(A) \cap \overline{L(C)} \neq \varnothing$ või $\overline{L(A)} \cap L(C) = \varnothing$. Seega $L(D) \neq \varnothing$ ja masin $\mathcal{M}_1$ lõpetab töö tagasilükkamisega.

2. Defineerime keele

$$\mathcal{L}_2 = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ on Turingi masin ja } \mathcal{M} \text{ keel on } (010)^n,\ n \geq 1\ \}\ .$$

Selles ülesandes näitad, et $\mathcal{L}_2$ on mittelahenduv keel.
Juhis: näiteks võid kasutada taandamist keelelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$. Eeldame, et leidub Turingi masin $\mathcal{M}_2$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_2$. Konstrueeri Turingi masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$, kus

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TM}} = \{\langle \mathcal{M}, w \rangle \mid \mathcal{M} \text{ on Turingi masin ja } \mathcal{M} \text{ aktsepteerib sisendsõnet } w\}\ .$$

Sisendil $\langle \mathcal{M}, w \rangle$, teeb masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ järgmist.

1. Konstrueerib masina $\mathcal{M}_w$, mis sisendil x teeb järgmist.
   (a) „Simuleerib“ masina $\mathcal{M}$ töökäiku sõnel w.
   (b) Kui $\mathcal{M}$ peatub tagasilükkamisega, siis $\mathcal{M}_w$ peatub tagasilükkamisega.
   (c) Kui $\mathcal{M}$ peatub aktsepteerimisega, siis $\mathcal{M}_w$ kontrollib, kas sõne x on kujul $(010)^n$, $n \geq 1$. Kui jah, siis peatub aktsepteerimisega. Kui ei, siis peatub tagasilükkamisega.
2. Teeb masina $\mathcal{M}_2$ abil kindlaks, kas $L(\mathcal{M}_w) = \{(010)^n, n \geq 1\}$. Kui jah, siis peatub aktsepteerimisega. Kui ei, siis peatub tagasilükkamisega.

Vii lõpule taandamise detailid, kui vaja, ja näita, et $\mathcal{L}_2$ on mittelahenduv keel.

Lahendus. Eeldame, et keel $\mathcal{L}_2$ on lahenduv ja olgu $\mathcal{M}_2$ Turingi masin, mis seda keelt lahendab. Konstrueerime Turingi masina $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$, mis tegutseb sisendil $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ nii, nagu kirjeldatud ülesande tekstis.

Kui $\langle M, w \rangle \in \mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$, siis masin $\mathcal{M}$ peatub sisendil w aktsepteerimisega. Siis punkti 1c põhjal aktsepteerib konstrueeritud masin $\mathcal{M}_w$ kõiki sisendsõnesid x kujul $(010)^n$, $n \geq 1$, ja ainult neid. Seega $L(\mathcal{M}_w) = \{(010)^n \mid n \geq 1\}$. Seetõttu lõpeb punktis 2 masina $\mathcal{M}_2$ töö ja ka masina $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ töö aktsepteerimisega.

Kui $\langle M, w \rangle \notin \mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$, siis masin $\mathcal{M}$ kas peatub sisendil w tagasilükkamisega või ei peatu üldse. Mõlemal juhul ei aktsepteeri masin $\mathcal{M}_w$ ühtegi sõnet x, st $L(\mathcal{M}_w) = \varnothing$. Sel juhul lõpeb punktis 2 masina $\mathcal{M}_2$ töö ja siis ka masina $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ töö tagasilükkamisega.

Kokkuvõttes saame, et masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ aktsepteerib sisendit $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ parajasti siis, kui masin $\mathcal{M}$ aktsepteerib sõnet w. Teiste sõnadega, masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ lahendab keelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$. Kuid keel $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$ on mittelahenduv, seega ei saa masinat $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ olemas olla. Järelikult ei saa olemas olla ka keelt $\mathcal{L}_2$ lahendavat masinat.

3. **Definitsioon:** KNK-valemi ϕ *sage literaal* on literaal, mis esineb vähemalt pooltes kõigist disjunktidest.

Defineerime keele SAGE-LITERAAL:

$$\textsf{SAGE-LITERAAL} = \{\langle \phi \rangle \mid \phi \text{ on } \textsf{KNK}\text{-valem, milles esineb sage literaal}\} \ .$$

Kas SAGE-LITERAAL $\in \mathcal{P}$? Põhjenda vastust.

Lahendus. Sisalduvus SAGE-LITERAAL $\in \mathcal{P}$ kehtib, sest me võime valemis ϕ järjest läbi vaadata kõikide disjunktide literaalid ja iga literaali puhul kokku lugeda, mitmes disjunktis ta esineb. Kokkulugemiseks piisab kõik valemi literaalid järjest läbi käia.

Kui valemi ϕ pikkus on n, siis literaale on $O(n)$ ning iga literaali puhul kulub esinemiste arvu kokkulugemiseks $O(n)$ sammu. Seega on kirjeldatud algoritmi kogukeerukus $O(n^2)$ ehk see algoritm on polünomiaalne.

4. Defineerime keele 3-KLIKKI:

$$\begin{aligned}\textsf{3-KLIKKI} = \{\langle \mathcal{G}, k \rangle \mid \mathcal{G} &\text{ on suunamata graaf, milles on} \\ &\text{vähemalt 3 mittekattuvat klikki suurusega } k\} \ .\end{aligned}$$

Selles ülesandes näitad, et 3-KLIKKI on $\mathcal{NP}$-täielik.

(a) Tõesta, et 3-KLIKKI $\in \mathcal{NP}$.

(b) Tõesta, et 3-KLIKKI on $\mathcal{NP}$-raske.

Juhis: võid kasutada polünomiaalset taandamist keelelt KLIKK keelele 3-KLIKKI. Ära unusta näidata, et reduktsioon on korrektne ja polünomiaalne.

Lahendus. (a) Vaatleme mittedetermineeritud algoritmi, mis „arvab ära“ kolm tippude hulka ning kontrollib neist igaühe puhul, kas seal on vähemalt k tippu ja kas iga kahe tipu vahel on serv. Kumbki kontroll tehtav polünomiaalse ajaga, sealhulgas teine kontroll $O(n^2)$ sammuga, kus n on graafi $\mathcal{G}$ tippude arv, sest piisab lihtsalt läbi vaadata kõik tipupaarid. Järelikult on see mittedetermineeritud algoritm polünomiaalne.

(b) Taandame keele KLIKK polünomiaalselt keelele $\mathsf{3\text{-}KLIKKI}$. Defineerime funktsiooni f, mis seab sõnele $\langle \mathcal{G}, k \rangle$ seab vastavusse sõne $\langle \mathcal{G}_3, k \rangle$, kus $\mathcal{G}_3$ on kolmest sidusast komponendist koosnev graaf, mille iga komponent on isomorfne graafiga $\mathcal{G}$. Funktsioon f on arvutatav polünomiaalse ajaga graafi $\mathcal{G}$ tippude arvu suhtes, sest graafi $\mathcal{G}$ esitamiseks piisab polünomiaalsest hulgast infost (tipud ja servad) ning selle info kopeerimine konstantses hulgas eksemplarides on tehtav polünomiaalse ajaga.

Kui $\langle \mathcal{G}, k \rangle \in \mathsf{KLIKK}$, siis graafis $\mathcal{G}$ leidub k-tipuline klikk. See klikk on olemas graafi $\mathcal{G}_3$ igas sidusas komponendis ning ilmselt on need 3 klikki omavahel mittekattuvad. Järelikult $\langle \mathcal{G}_3, k \rangle \in \mathsf{3\text{-}KLIKKI}$.

Vastupidi, kui $\langle \mathcal{G}_3, k \rangle \in \mathsf{3\text{-}KLIKKI}$, siis graafis $\mathcal{G}_3$ leidub 3 mittekattuvat k-tipulist klikki. Valime neist ühe. See klikk kuulub graafis $\mathcal{G}_3$ mingisse sidusasse komponenti. Et see komponent on isomorfne graafiga $\mathcal{G}$, siis kuulub see klikk ka graafi $\mathcal{G}$. Järelikult $\langle \mathcal{G}, k \rangle \in \mathsf{KLIKK}$.

Seega on f keele KLIKK polünomiaalne reduktsioon keelele $\mathsf{3\text{-}KLIKKI}$. Et KLIKK on $\mathcal{NP}$-täielik ja $\mathsf{KLIKK} \leq_{\mathrm{P}} \mathsf{3\text{-}KLIKKI}$, siis ka $\mathsf{3\text{-}KLIKKI}$ on $\mathcal{NP}$-täielik.