Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

7. kodutöö lahendused

1. Anna iga järgmise võrduse kohta vastus, kas $f(n) = O(g(n))$ ja kas $f(n) = o(g(n))$ (põhjenda vastuseid):

(a) $f(n) = 2n + \log_2 n$ ja $g(n) = n$;

(b) $f(n) = \log_2 n$ ja $g(n) = n^{\frac{1}{10}}$;

(c) $f(n) = n^2$ ja $g(n) = 2^n$.

Lahendus. (a) Kasutades l'Hospitali reeglit, saame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \log_2 n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n \ln 2}}{1} = 2.$$

Seega kehtib $f(n) = O(g(n))$, sest leitud piirväärtus on lõplik, aga ei kehti $f(n) = o(g(n))$, sest leitud piirväärtus ei ole 0.

(b) Analoogiliselt saame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n^{\frac{1}{10}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln 2 \cdot \frac{1}{10} n^{-\frac{9}{10}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n^{\frac{1}{10}} \ln 2} = 0.$$

Seega iga $C > 0$ jaoks leidub selline n_0, et iga $n > n_0$ puhul $\frac{\log_2 n}{n^{\frac{1}{10}}} < C$. Järelikult kehtib nii $f(n) = O(g(n))$ kui ka $f(n) = o(g(n))$.

(c) Siin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n \ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n \ln^2 2} = 0.$$

Seega kehtivad mõlemad seosed, $f(n) = O(g(n))$ ja $f(n) = o(g(n))$.

2. **Definitsioon:** suunamata graafi tipu v *aste* on tipuga v intsidentsete servade arv, kus silmust arvestatakse kahe servana.

Defineerime keele $\mathsf{ASTE}\text{-}k$:

$$\mathsf{ASTE}\text{-}k = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ on suunamata graaf, mis sisaldab tippu astmega } k\}\ .$$

Tõesta, et $\mathsf{ASTE}\text{-}k \in \mathcal{P}$.

Lahendus. Vaatame läbi kõik graafi tipud ning iga tipu puhul loeme kokku, mitme tipuga ta ühendatud on. Ühendust tipu ja tema enda vahel arvestame kahekordselt. Kui ühenduste arv on k, siis aktsepteerime sisendit. Kui aga ühegi tipu puhul ei tule ühenduste arv k, siis lükkame sisendi tagasi.

Kui graafis leidub tipp astmega k, siis varem või hiljem leiab algoritm selle üles, sest vaadatakse läbi kõik tipud. Kui aga sellist tippu ei leidu, siis ükski tipp ei sobi ja algoritm peatub tagasilükkamisega.

See algoritm kujutab endast kahekordset tsüklit üle graafi tippude. Kui n on graafi tippude arv, siis täidetakse tsüklite sisu $O(n^2)$ korda ehk läbi tuleb kontrollida ainult polünomiaalne arv võimalikke variante. Igal tsüklisammul võtab serva olemasolu kontrollimine polünomiaalse aja. Järelikult on algoritm polünomiaalne.

3. Defineerime keele $\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT}$:

$$\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT} = \Big\{ \langle\phi\rangle \mid \phi \text{ on } \mathsf{KNK}\text{-valem,}$$
$$\text{millel on vähemalt kaks } \textbf{erinevat} \text{ kehtestavat väärtustust } \Big\} .$$

Tõesta, et $\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT}$ on $\mathcal{NP}$-täielik.

Juhis: esiteks näita, et $\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT} \in \mathcal{NP}$. Teiseks näita, et keel KEHT (ingl SAT) on polünomiaalselt taandatav keelele $\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT}$.

Lahendus. Keel $\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT}$ kuulub klassi $\mathcal{NP}$, sest kui kaks väärtustust on antud, siis kontrollimine, et valem on mõlemal väärtustusel tõene, võtab polünomiaalse aja valemi pikkuse suhtes: nii valemi disjunktide kui ka valemi enda tõeväärtuse arvutamiseks piisab valemi muutujad vasakult paremale järjest läbida ja jooksvalt tehete väärtused arvutada.

Tõestame järgnevalt, et keel KEHT on polünomiaalselt taandatav keelele $\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT}$. Defineerime funktsiooni f, mis seab igale KNK-valemile ϕ vastavusse KNK-valemi $\phi\wedge(z\vee w)\wedge(\bar{z}\vee w)$, kus z ja w on uued lausemuutujad.

Kui ϕ on kehtestatav, siis leidub valemi ϕ muutujate väärtustus, millel valem on tõene. Seda väärtustust saame täiendada valemi $\phi\wedge(z\vee w)\wedge(\bar{z}\vee\bar{w})$ kehtestavaks väärtustuseks kahel viisil, võttes z ja w tõeväärtusteks vastavalt tõene ja väär või väär ja tõene. Järelikult leidub valemil $f(\phi)$ vähemalt kaks erinevat kehtestavat väärtustust.

Vastupidi, kui valemil $f(\phi)$ leidub vähemalt kaks erinevat kehtestavat väärtustust, siis ükskõik millisel neist on konjunktsiooni kõik liikmed tõesed, sealhulgas on tõene ka osavalem ϕ. Järelikult valem ϕ on kehtestatav.

Seega saame, et $\phi \in \mathsf{KEHT}$ parajasti siis, kui $f(\phi) \in \mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT}$. Samuti on funktsioon f polünomiaalses ajas arvutatav, sest etteantud valemile tuleb juurde lisada ainult kaks konstantset liiget. Järelikult on polünomiaalse taandamise definitsiooni nõuded täidetud. Loengu 15 teoreemist järeldub nüüd, et keel $\mathsf{KAKSIK\text{-}KEHT}$ on $\mathcal{NP}$-täielik.

4. Definitsioon: *Mittesidus hulk* $\mathcal{S}$ graafis G on selline tippude hulk, et iga kahe tipu u, v puhul graafist G, kui tippude u ja v vahel pole serva, siis vähemalt üks neist kahest tipust kuulub hulka $\mathcal{S}$.

Defineerime keele MITTESIDUS-HULK:

$$\begin{aligned}\mathsf{MITTESIDUS\text{-}HULK} = \big\{\langle G, k\rangle \mid\ & G \text{ on suunamata graaf,} \\ & \text{mis sisaldab mittesidusat hulka suurusega } k\big\}\,.\end{aligned}$$

Tõesta, et MITTESIDUS-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik.

Juhis: esiteks näita, et MITTESIDUS-HULK $\in \mathcal{NP}$. Teiseks näita, et keel KLIKK on polünomiaalselt taandatav keelele MITTESIDUS-HULK.

Lahendus. Keel MITTESIDUS-HULK kuulub klassi $\mathcal{NP}$, sest me võime mittedetermineeritult valida tippude hulga $\mathcal{S}$ ning seejärel kontrollida, kas selle tippude arv on k ning kas graafi G igast kahest servaga ühendamata tipust vähemalt üks kuulub hulka $\mathcal{S}$. Niisugune kontrollimine on tehtav polünomiaalse ajaga, sest graafi G kõik tipupaarid saab läbi vaadata $O(n^2)$ sammuga, kus n on graafi tippude arv.

Vaatleme graafi $G = (V, E)$. Väljendame lause „$\mathcal{K}$ on graafi G klikk“ valemiga:

$$\forall u \forall v (u \in \mathcal{K} \wedge v \in \mathcal{K} \rightarrow uv \in E).$$

Leiame selle pöördvastandlause:

$$\forall u \forall v (uv \notin E \rightarrow u \in V \setminus \mathcal{K} \vee v \in V \setminus \mathcal{K}).$$

Viimane valem väljendab lauset „$V \setminus \mathcal{K}$ on graafi G mittesidus hulk“ Seega $\mathcal{K}$ on graafi G klikk parajasti siis, kui $V \setminus \mathcal{K}$ on graafi G mittesidus hulk.

Defineerime funktsiooni f, mis sisendsõnele $\langle G, k\rangle$ seab vastavusse sõne $\langle G, |V| - k\rangle$. Ilmselt on see funktsioon polünomiaalses ajas arvutatav, sest vaja on ainult arvutada $|V| - k$ ja kirjutada see senise k asemele. Lisaks

$$\begin{aligned} & \langle G, k\rangle \in \mathsf{KLIKK} \\ \Leftrightarrow\ & \text{graafis } G \text{ leidub } k\text{-tipuline klikk } \mathcal{K} \\ \Leftrightarrow\ & \text{graafis } G \text{ leidub } |V| - k\text{-tipuline mittesidus hulk } V \setminus \mathcal{K} \\ \Leftrightarrow\ & \langle G, |V| - k\rangle \in \mathsf{MITTESIDUS\text{-}HULK}\end{aligned}$$

Järelikult on f keele KLIKK polünomiaalne reduktsioon keelele MITTESIDUS-HULK. Et keel KLIKK on $\mathcal{NP}$-täielik ja KLIKK $\leq_{\mathrm{P}}$ MITTESIDUS-HULK, siis ka keel MITTESIDUS-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik.