

# Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

## 6. kodutöö lahendused

### 1. Defineerime keele

$$\mathcal{L}_1 = \{ \langle A \rangle \mid A \text{ on deterministlik lõplik automaat ja } L(A) = (01)^* \} .$$

Tõesta, et  $\mathcal{L}_1$  on lahenduv keel.

*Lahendus.* Keelt  $\mathcal{L}_1$  lahendab Turingi masin, mis tegutseb sisendil  $\langle A \rangle$  järgmiselt.

1. Konstrueerib deterministliku lõpliku automaadi  $\mathcal{B}$ , mille keel on  $(01)^*$ . See automaat on olemas, sest  $(01)^*$  on regulaarne keel.
2. Käivitab Turingi masina, mis lahendab keelt  $\mathcal{L}_{\text{DLAVÖRD}}$  (12. nädala praktikumi ülesanne 2), andes talle ette sisendi  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ .
3. Kui see masin peatub aktsepteerivas olekus, siis läheb aktsepteerivasse olekusse, vastasel juhul tagasilükkavasse.

Kui  $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (01)^*$ , siis  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \in \mathcal{L}_{\text{DLAVÖRD}}$ . Seetõttu lõpeb punkti 2 masina ning ka masina  $\mathcal{M}$  töö aktsepteerivas olekus. Kui aga  $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \neq (01)^*$ , siis  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \notin \mathcal{L}_{\text{DLAVÖRD}}$  ja masinad lõpetavad töö tagasilükkavas olekus.

### 2. Defineerime keele

$$\mathcal{L}_3 = \{ \langle A \rangle \mid A \text{ on deterministlik lõplik automaat} \\ \text{ja } L(A) \text{ sisaldab täpselt kolme sõnet } w \text{ hulgast } (01)^* \} .$$

Tõesta, et  $\mathcal{L}_3$  on lahenduv keel.

*Lahendus.* Konstrueerime Turingi masina  $\mathcal{M}$ , mis lahendab keelt  $\mathcal{L}_3$ . Sisendil  $\langle A \rangle$  teeb masin  $\mathcal{M}$  järgmist.

1. Konstrueerib deterministliku lõpliku automaadi  $\mathcal{B}$ , mis aktsepteerib parajasti kõiki sõnesid  $(01)^*$  (sama nagu eelmise ülesande punktis 1).

2. Konstrueerib deterministliku lõpliku automaadi  $\mathcal{C}$ , et  $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B})$ . Selline automaat on olemas, sest regulaarsete keelte ühisosa on regulaarne.
3. Teeb läbi praktikumis vaadeldud, keelt  $\mathcal{L}_{k\text{-SÖNE}}$  lahendava Turingi masina töö sisendil  $\langle \mathcal{C}, 3 \rangle$ .
4. Kui see masin peatub aktsepteerivas olekus, siis läheb aktsepteerivasse olekusse, vastasel juhul tagasilükkavasse.

Veendume, et masin  $\mathcal{M}$  tõepoolest lahendab keelt  $\mathcal{L}_3$ . Automaadi  $\mathcal{C}$  keel koosneb parajasti nendest automaadi  $\mathcal{A}$  keele sõnedest, mis kuuluvad hulka  $(01)^*$ . Kui neid sõnesid on täpselt kolm, siis peatub keelt  $\mathcal{L}_{k\text{-SÖNE}}$  lahendav Turingi masin sisendil  $\langle \mathcal{C}, 3 \rangle$  aktsepteerimisega. Kui neid sõnesid on mingi muu arv, siis peatub see Turingi masin sisendil  $\langle \mathcal{C}, 3 \rangle$  tagasilükkamisega.

3. Olgu  $\mathcal{L}$  Turingi mõttes äratuntav keel. Lisaks eeldame, et  $\overline{\mathcal{L}} \leq_M \mathcal{L}$ , kus  $\overline{\mathcal{L}}$  on keele  $\mathcal{L}$  täiend. Tõesta, et  $\mathcal{L}$  on Turingi mõttes lahenduv keel.

*Lahendus.* Et  $\overline{\mathcal{L}} \leq_M \mathcal{L}$ , siis leidub arvutatav funktsioon  $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ , et iga  $w \in \Sigma^*$  puhul  $w \in \overline{\mathcal{L}} \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{L}$ . Olgu  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  Turingi masin, mis tunneb ära keelt  $\mathcal{L}$ . Kirjeldame Turingi masinat  $\mathcal{M}$ , mis lahendab keelt  $\mathcal{L}$ . Sisendsõnel  $w$  masin  $\mathcal{M}$ :

1. arvutab välja  $f(w)$ ;
2. paneb paralleelselt tööle ühe eksemplari masinast  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  sisendsõnel  $w$  ja teise eksemplari masinast  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  sisendsõnel  $f(w)$ , tehes vaheldumisi ühe sammu ühe masinaga, ühe sammu teise masinaga jne;
3. kui sõnel  $w$  töötav  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  peatub aktsepteerivas olekus, siis läheb aktsepteerivasse olekusse; kui aga sõnel  $f(w)$  töötav  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  peatub aktsepteerivas olekus, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

Tõestame, et  $\mathcal{M}$  lahendab keelt  $\mathcal{L}$ .

- Kui  $w \in \mathcal{L}$ , siis masin  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  aktsepteerib sõnet  $w$  ehk  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  peatub sõnel  $w$  aktsepteerivas olekus. Samas masin  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  sõnel  $f(w)$  aktsepteerivas olekus ei peatu, sest  $w \notin \overline{\mathcal{L}}$  ning  $f(w) \notin \mathcal{L}$ . Järelikult  $\mathcal{M}$  peatub aktsepteerivas olekus.
- Kui  $w \notin \mathcal{L}$ , siis  $w \in \overline{\mathcal{L}}$ . Seega  $f(w) \in \mathcal{L}$ . Seetõttu peatub  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  sõnel  $f(w)$  aktsepteerivas olekus. Samas masin  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  sõnel  $w$  aktsepteerivas olekus ei peatu. Järelikult peatub  $\mathcal{M}$  tagasilükkavas olekus.

*Lahendus 2.* Kasutame samu tähistusi nagu esimeses lahenduses. Ühelt poolt, eelduse põhjal on keel  $\mathcal{L}$  Turingi mõttes äratuntav. Teiselt poolt vaatleme Turingi masinat, mis sisendsõnel  $w$

1. arvutab välja  $f(w)$ ;
2. teeb läbi Turingi masina  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  töö sõnel  $f(w)$  ning peatub samas olekus mis  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ .

Kuna  $w \in \overline{\mathcal{L}} \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  aktsepteerib sõnet  $f(w)$ , siis tunneb see masin ära keelt  $\overline{\mathcal{L}}$ . See tähendab, et keel  $\mathcal{L}$  on Turingi mõttes kaasäratuntav. Et keel  $\mathcal{L}$  on korruga Turingi mõttes äratuntav ja kaasäratuntav, siis on see keel loengu 13 teoreemi põhjal lahenduv.

#### 4. Defineerime keele

$$\mathcal{L}_4 = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ on Turingi masin ja } L(\mathcal{M}) = (01)^* \} .$$

Tõesta, et  $\mathcal{L}_4$  on mittelahenduv keel.

**Juhis:** võib näiteks kasutada taandamist keelelt  $\mathcal{L}_{\text{TM}}$ . Eeldame, et leidub Turingi masin, mis lahendab keelt  $\mathcal{L}_4$ . Näita, kuidas konstrueerida Turingi masinat, mis lahendab keelt  $\mathcal{L}_{\text{TM}}$ .

*Lahendus.* Oletame väitevastaselt, et keel  $\mathcal{L}_4$  on lahenduv, ning olgu  $\mathcal{M}_4$  Turingi masin, mis seda keelt lahendab. Konstrueerime Turingi masina  $\mathcal{M}_L$ , mis lahendab keelt  $\mathcal{L}_{\text{TM}}$ . Masin  $\mathcal{M}_L$  teeb sisendil  $\langle \mathcal{M}, w \rangle$  järgmist.

1. Konstrueerib masina  $\mathcal{M}_w$ , mis sisendi  $x$  puhul kontrollib, kas  $x$  on kujul  $(01)^*$ , ning
  - (a) kui  $x$  on kujul  $(01)^*$ , siis  $\mathcal{M}_w$  peatub aktsepteerivas olekus;
  - (b) kui  $x$  ei ole kujul  $(01)^*$ , siis  $\mathcal{M}_w$  teeb läbi masina  $\mathcal{M}$  töökäigu sisendil  $w$  ja peatub aktsepteerivas olekus parajasti siis, kui  $\mathcal{M}$  peatub sisendil  $w$  aktsepteerivas olekus.
2. Teeb läbi masina  $\mathcal{M}_4$  töö sisendil  $\langle \mathcal{M}_w \rangle$ .
3. Töö lõppedes läheb vastupidisesse olekusse võrreldes sellega, milles lõpetas töö masin  $\mathcal{M}_4$ .

Tõestame, et masin  $\mathcal{M}_L$  on korrektne.

- Kui  $\langle \mathcal{M}, w \rangle \in \mathcal{L}_{\text{TM}}$ , siis masin  $\mathcal{M}$  aktsepteerib sõnet  $w$ . Järelikult masin  $\mathcal{M}_w$  aktsepteerib nii sõnesid kujul  $(01)^*$  kui ka sõnesid, mis ei ole kujul  $(01)^*$ . Seetõttu  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_w) \neq (01)^*$  ning masin  $\mathcal{M}_4$  lõpetab sisendil  $\langle \mathcal{M}_w \rangle$  töö mitteaktsepteerivas olekus. Seega  $\mathcal{M}_L$  lõpetab sisendil  $\langle \mathcal{M}, w \rangle$  töö aktsepteerivas olekus.

- Kui  $\langle M, w \rangle \notin \mathcal{L}_{\text{TM}}$ , siis masin  $\mathcal{M}$  ei aktsepteeri sõnet  $w$ . Seetõttu aktsepteerib masin  $\mathcal{M}_w$  parajasti sõnesid kujul  $(01)^*$ . Seega  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_w) = (01)^*$  ning masin  $\mathcal{M}_4$  lõpetab sisendil  $\langle \mathcal{M}_w \rangle$  töö aktsepteerivas olekus. Järelikult  $\mathcal{M}_L$  lõpetab sisendil  $\langle \mathcal{M}, w \rangle$  töö tagasilükkavas olekus.

Nii oleme konstrueerinud masina  $\mathcal{M}_L$ , mis lahendab keelt  $\mathcal{L}_{\text{TM}}$ . Kuid seda masinat ei saa olemas olla, vastuolu.