Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

5. kodutöö lahendused

1. Kirjelda teostustasemel sellist Turingi masinat, mis lahendab järgmist keelt tähestikus $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$\mathcal{L} = \{w \mid w \text{ sisaldab nullisid rohkem kui ühtesid}\}.$$

Lahendus. Kirjeldame, kuidas masin töötab etteantud sisendsõnel.

1. Nihutab kõik sisendsõne sümbolid ühe lahtri võrra paremale ja kirjutab lindi esimesse lahtrisse tühiku (see on vajalik selleks, et pea oskaks hiljem vasakule liikudes sisendsõne esimese sümboli üles leida).
2. Viib pea lindi algusesse.
3. Vaatab järjest läbi lindi sümbolid, kuni leiab esimese märgistamata nulli; märgistab selle. Kui ühtegi märgistamata nulli ei leia, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.
4. Viib pea lindi algusesse.
5. Vaatab järjest läbi lindi sümbolid, kuni leiab esimese märgistamata ühe; märgistab selle. Kui ühtegi märgistamata ühte ei leia, siis läheb aktsepteerivasse olekusse. Siirdub sammule 2.

See masin kontrollib, kas etteantud sisendsõnes vastab igale nullile üks. Kui vastab, siis on ühtesid vähemalt sama palju kui nullisid ja masin lükkab sõne tagasi. Kui leidub null, millele ühte ei vasta, siis on nullisid rohkem ja masin aktsepteerib sõnet.

2. Olgu $\mathcal{L}$ regulaarne keel tähestikus Σ. Näita, et leidub deterministlik Turingi masin $\mathcal{M}$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}$.

Lahendus. Et keel $\mathcal{L}$ on eelduse kohaselt regulaarne, siis leidub lõplik automaat $\mathcal{M}_0 = (Q_0, \Sigma_0, \delta_0, q_{00}, F_0)$, mis keelt $\mathcal{L}$ aktsepteerib. Konstrueerime Turingi masina $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{akts}}, q_{\text{tag}})$ järgmiselt.

- Valime kaks uut olekut q_{akts} ja q_{tag}, mille määrame vastavalt masina $\mathcal{M}$ aktsepteerivaks olekuks ja tagasilükkavaks olekuks.
- $Q = Q_0 \cup \{q_{\text{akts}}, q_{\text{tag}}\}$
- $\Sigma = \Sigma_0$
- $\Gamma = \Sigma_0 \cup \{\text{␣}\}$
- $q_0 = q_{00}$
- Üleminekufunktsiooni defineerime avaldisega

$$\delta(q,a) = \begin{cases} (\delta_0(q,a), a, \mathsf{R}) & \text{kui } q \in Q,\ a \in \Sigma \\ (q_{\text{akts}}, \text{␣}, \mathsf{R}) & \text{kui } q \in F,\ a = \text{␣} \\ (q_{\text{tag}}, \text{␣}, \mathsf{R}) & \text{kui } q \in Q \setminus F,\ a = \text{␣} \\ (q, a, \mathsf{R}) & \text{ülejäänud juhtudel} \end{cases}$$

See Turingi masin loeb lindil olevat sisendsõnet sümbolhaaval, liikudes iga sümboli lugemise järel ühe sammu võrra paremale. Kui pea läbib sõne sümboleid, siis muutuvad masina $\mathcal{M}$ olekud samamoodi nagu automaadis $\mathcal{M}_0$. Kui aga pea jõuab sõne lõppu tühiku peale, siis läheb masin $\mathcal{M}$ kas olekusse q_{akts}, kui sõne läbimine lõppes hulka F kuuluvas olekus, või olekusse q_{tag}, kui sõne läbimine lõppes hulka F mittekuuluvas olekus. Siis masin $\mathcal{M}$ peatub.

Kui automaat $\mathcal{M}_0$ aktsepteerib sisendsõnet, siis ka masin $\mathcal{M}$ aktsepteerib sisendsõnet. Kui automaat $\mathcal{M}_0$ sisendsõnet ei aktsepteeri, siis lükkab masin $\mathcal{M}$ sisendsõne tagasi. Järelikult masin $\mathcal{M}$ lahendab keelt $\mathcal{L}$.

3. Tõesta, et kui $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ on kaks Turingi mõttes lahenduvat keelt, siis

(a) ühisosa $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ on Turingi mõttes lahenduv keel;

(b) konkatenatsioon $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ on Turingi mõttes lahenduv keel.

Juhis: eeldame, et leiduvad Turingi masinad $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$, mis lahendavad vastavalt keeli $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$. Konstrueeri neid kasutades kaks Turingi masinat, mis lahendavad vastavalt keeli $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ja $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$.

Lahendus. (a) Olgu $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ Turingi masinad, mis lahendavad vastavalt keeli $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$. Konstrueerime kahe lindiga Turingi masina $\mathcal{M}$, mis tegutseb järgmiselt. Töö alguses on 1. lindile kirjutatud sisendsõne ja 2. lint on tühi.

1. Kopeerib 1. lindi sisu 2. lindile.
2. Teeb läbi masina $\mathcal{M}_1$ töö, andes talle sisendi ette 1. lindil.
   - Kui masin $\mathcal{M}_1$ lõpetab töö aktsepteerivas olekus, siis läheb sammule 3.

- Kui masin $\mathcal{M}_1$ lõpetab töö tagasilükkavas olekus, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

3. Teeb läbi masina $\mathcal{M}_2$ töö, andes talle sisendi ette 2. lindil.
   - Kui masin $\mathcal{M}_2$ lõpetab töö aktsepteerivas olekus, siis läheb aktsepteerivasse olekusse.
   - Kui masin $\mathcal{M}_2$ lõpetab töö tagasilükkavas olekus, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

Kui mõlemad masinad $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ aktsepteerivad sisendsõnet, siis aktsepteerib sisendsõnet ka masin $\mathcal{M}$. Kui vähemalt üks masinatest $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ lükkab sisendsõne tagasi, siis ka masin $\mathcal{M}$ lükkab sisendsõne tagasi; juhtub see kas sammul 2 või sammul 3. Seejuures masin $\mathcal{M}$ kindlasti peatub. Järelikult aktsepteerib masin $\mathcal{M}$ parajasti keelde $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ kuuluvaid sõnesid ja lükkab ülejäänud tagasi. Seega $\mathcal{M}$ lahendab keelt $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Et iga mitme lindiga Turingi masin on ekvivalentne mingi ühe lindiga Turingi masinaga, siis leidub ka ühe lindiga Turingi masin, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

(b) Sõne w kuulub keelde $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ parajasti siis, kui leiduvad sõned $w_1 \in \mathcal{L}_1$ ja $w_2 \in \mathcal{L}_2$, et $w = w_1 w_2$. Otsitav Turingi masin vaatab läbi kõik sõne w prefiksid pikkuse järjekorras ning igaühe puhul kontrollib, kas prefiks kuulub keelde $\mathcal{L}_1$ ja ülejäänud osa keelde $\mathcal{L}_2$.

iga $k = 0, \ldots, |w|$ puhul
    $w_1 =$ sõne w prefiks pikkusega k
    $w_2 =$ sõne w ülejäänud osa
    tee läbi masina $\mathcal{M}_1$ töö sõnel w_1
    kui $\mathcal{M}_1$ peatus aktsepteerimisega, siis
        tee läbi masina $\mathcal{M}_2$ töö sõnel w_2
        kui $\mathcal{M}_2$ peatus aktsepteerimisega, siis aktsepteeri sõnet w
lõpp
lükka sõne w tagasi

Kui $w \in \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$, siis leiduvad keeltes $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ vastavalt sõned w_1 ja w_2, et $w = w_1 w_2$ ning masinad $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ peatuvad vastavalt sõnedel w_1 ja w_2 aktsepteerimisega. Et algoritm vaatab läbi kõik võimalikud prefiksid w_1, siis varem või hiljem jõuab järg ka sobiva prefiksini.

Kui aga $w \in \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$, siis ükski prefiks ei sobi. See tähendab, masinad $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ küll lõpetavad töö, kuid alati vähemalt üks neist lõpetab töö tagasilükkamisega. Nii tehakse läbi terve tsükkel ning täitmisjärg siirdub pärast tsüklit asuva tegevuse juurde, millega sõne w lükatakse tagasi.

4. Defineerime uue Turingi masinate tüübi, nn vasakule mitteliikuva Turingi masina. See sarnaneb tavalise deterministliku Turingi masinaga, kuid üleminekufunktsioon on

$$\delta \ : \ Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathsf{R}, \mathsf{S}\} \ .$$

Vasakule mitteliikuvas Turingi masinas võib pea liikuda paremale (R) või jääda samasse kohta (S). Näita, et vasakule mitteliikuv Turingi masin ei ole ekvivalentne tavalise Turingi masinaga. Täpsemalt, tõesta, et kõik keeled, mida tunneb ära vasakule mitteliikuv Turingi masin, on regulaarsed.

Juhis: eeldame, et $\mathcal{M}$ on vasakule mitteliikuv Turingi masin. Paneme tähele, et üheski arvutuses ei liigu $\mathcal{M}$ pea kunagi vasakule. Konstrueeri deterministlik lõplik automaat, mis tunneb ära sama keelt, mida tunneb ära $\mathcal{M}$.

Lahendus. Olgu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{akts}}, q_{\text{tag}})$ Turingi masin, milles üleminekufunktsioon on ülesandes kirjeldatud kujul. Konstrueerime sellega ekvivalentse determineeritud lõpliku automaadi $\mathcal{A} = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$.

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et masin $\mathcal{M}$ ei kirjuta lindile tühikut, sest vastasel korral võime linditähestikule Γ lisada uue sümboli s ja muuta masina üleminekufunktsiooni, määrates, et tühiku asemel kirjutatakse igal pool lindile sümbol s ja sümboli s lugemisel tegutsetakse samamoodi nagu tühiku lugemisel. Masina $\mathcal{M}$ keel sellest ei muutu.

Samamoodi võime eeldada, et siirdumisel olekusse q_{akts} või q_{tag} liigub masina pea paremale, mitte ei jää paigale.

Valime $Q' = Q$, $\Sigma' = \Sigma$ ja $q_0' = q_0$. Üleminekufunktsiooni defineerime:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} q, & \text{kui } q = q_{\text{akts}} \text{ või } q = q_{\text{tag}}, \\ q_{\text{tag}}, & \text{kui } \mathcal{M} \text{ oleku } q \text{ ja sümboli } a \text{ puhul edaspidi enam kunagi} \\ & \text{sammu paremale ei tee,} \\ q', & \text{kui } \mathcal{M} \text{ oleku } q \text{ ja sümboli } a \text{ puhul teeb edaspidi sammu} \\ & \text{paremale ja siirdub esimese sellise sammuga olekusse } q'. \end{cases}$$

Lõpuks olgu F olekute hulk, mis sisaldab olekut q_{akts} ja kõiki olekuid, millest lähtudes ja tühikuid lugedes jõuab $\mathcal{M}$ olekusse q_{akts}.

Kui masin $\mathcal{M}$ aktsepteerib sõnet w, siis peatub ta olekus q_{akts}. Sõltumata sellest, kas see juhtub sõne sümboli või järgneva tühiku lugemise ajal, lõpetab automaat $\mathcal{A}$ seda sõnet lugedes töö hulka F kuuluvas olekus. Kui masin $\mathcal{M}$ ei aktsepteeri sõnet w, siis ta kas peatub olekus q_{tag} või jääb lõpmatusse tsüklisse ühes lindi lahtris. Kummalgi juhul lõpetab automaat $\mathcal{A}$ töö hulka F mittekuuluvas olekus. Seega aktsepteerib $\mathcal{M}$ mingit regulaarset keelt. Nende keelte klass on aga rangelt kitsam kui Turingi mõttes äratuntavate keelte klass (9. praktikum ül 1, 11. praktikum ül 1).