Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

4. kodutöö lahendused

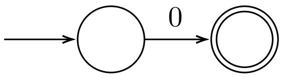
1. Konstrueeri mittedeterministlik lõplik automaat (NFA), mis tunneb ära järgmise regulaaravaldise poolt kirjeldatavat keelt:

(a) $(1\,(0 \cup 1)^*\,1) \cup \epsilon$

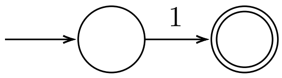
(b) $(10^+1) \cup (01^+0) \cup \varnothing$

Lahendus. (a) Konstrueerime selle mittedetermineeritud lõpliku automaadi nii nagu kirjeldatud 7. nädala esimese lemma tõestuses ja näites 3.

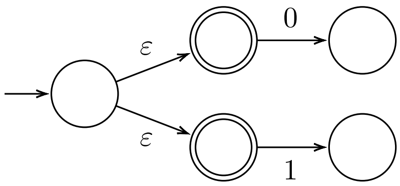
Regulaaravaldistele 0 ja 1 vastavad automaadid



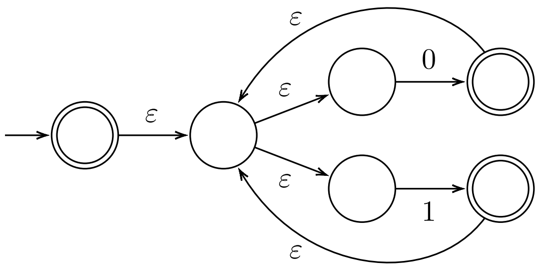
ja



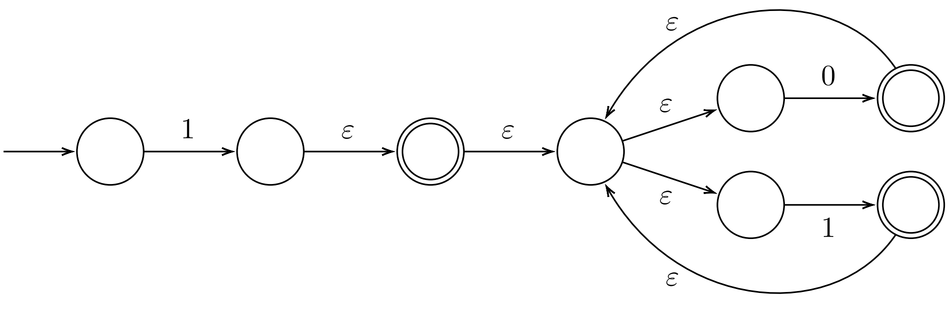
Regulaaravaldistele $0 \cup 1$ ja $(0 \cup 1)^*$ vastavad automaadid



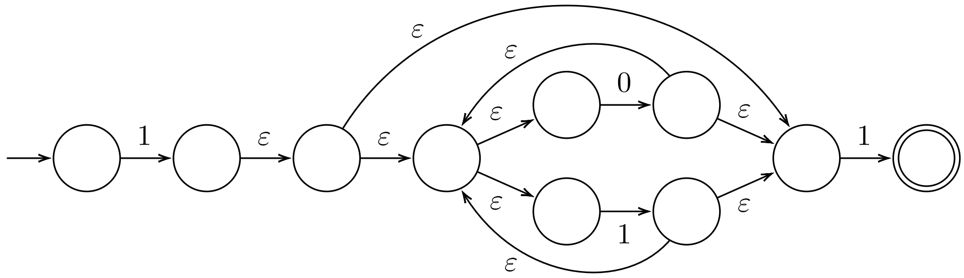
ja



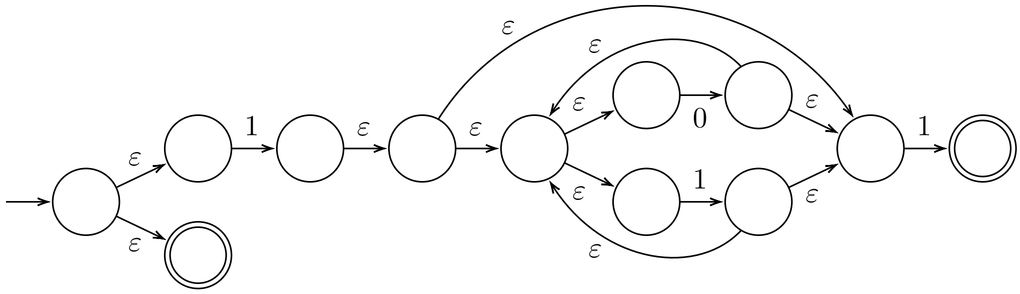
Regulaaravaldisele $1(0 \cup 1)^*$ vastab automaat



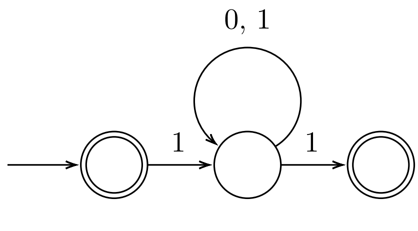
Regulaaravaldisele $1(0 \cup 1)^*1$ vastab automaat



Lõpuks, regulaaravaldisele $1(0 \cup 1)^*1 \cup \varepsilon$ vastab automaat

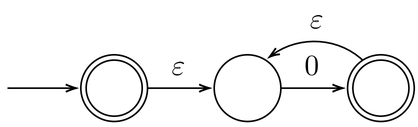


Praegusel lihtsal juhul võib antud regulaaravaldisele vastava automaadi muidugi ka otse välja kirjutada:

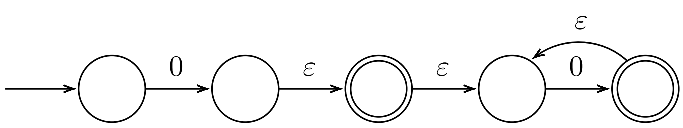


See automaat on eelmisega samaväärne.

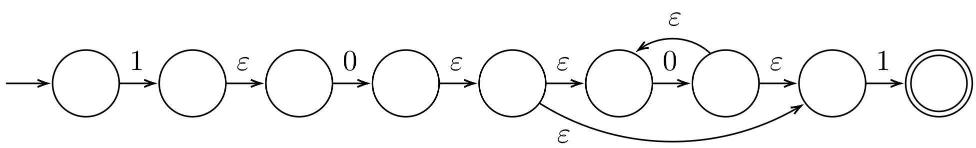
(b) Vaatleme kõigepealt ühendi esimest liiget. Et $0^+ = 00^*$, siis leiame kõigepealt regulaaravaldisele 0^* vastava automaadi



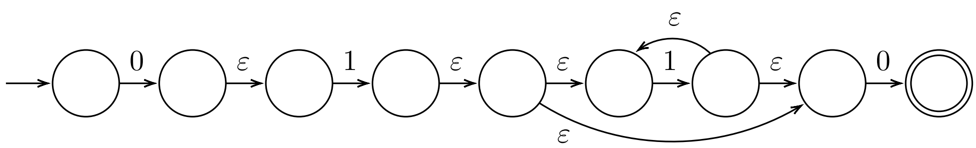
ning seejärel regulaaravaldisele 0^+ vastava automaadi



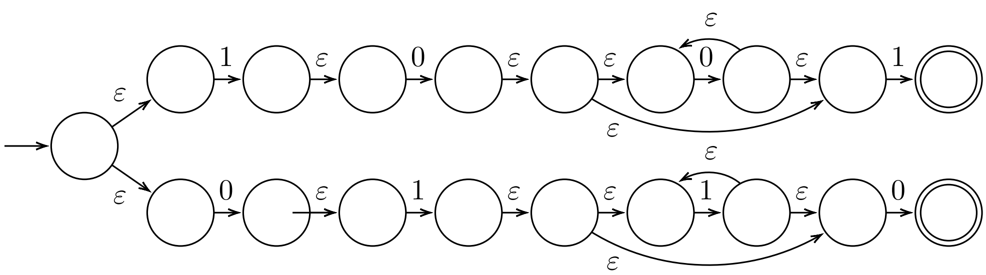
Sarnaselt osaga (a) saame, et regulaaravaldisele 10^+1 vastab automaat



Analoogiliselt, teisele regulaaravaldisele 01^+0 vastab automaat

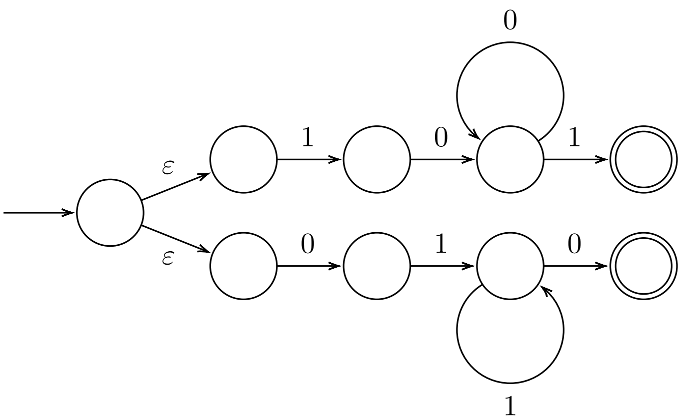


Regulaaravaldisele $(10^+1) \cup (01^+0)$ vastab automaat

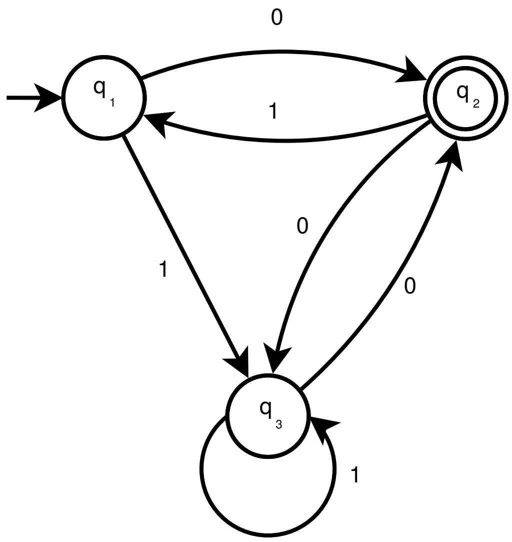


Et iga regulaaravaldise R puhul $R \cup \emptyset = R$, siis sobib see automaat ka ülesandes antud regulaaravaldise jaoks.

Ka selle automaadi võib leida otse ja lihtsamal kujul:

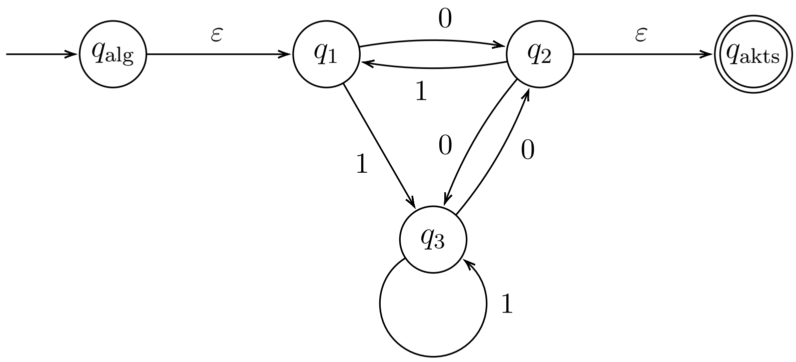


2. Konstrueeri regulaaravaldis järgmise deterministliku lõpliku automaadiga (DFA) defineeritud keele $\mathcal{L}$ jaoks:



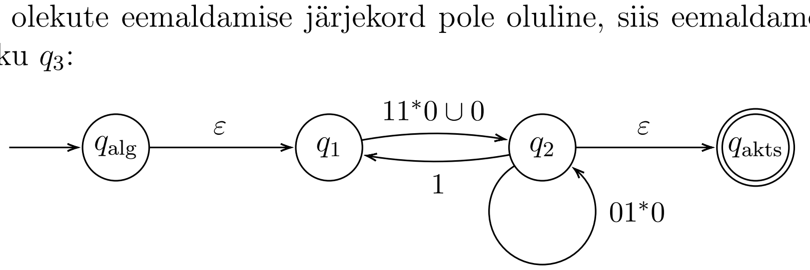
Lahendus. Kasutame meetodit, mida on kirjeldatud 7. nädala teise lemma tõestuses ning näidetes 4 ja 5.

Lisame uue algoleku ja uue aktsepteeriva oleku:

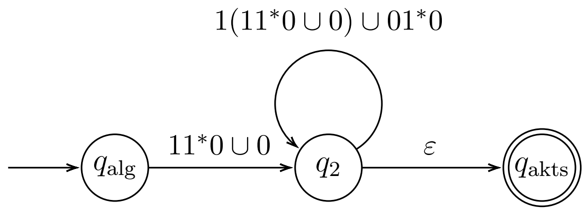


Selguse mõttes oleme jätnud joonistamata kõik kaared märgendiga $\emptyset$ ja kõik samasse tippu naasvad silmused märgendiga ε.

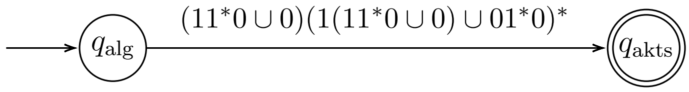
Kuna olekute eemaldamise järjekord pole oluline, siis eemaldame kõigepealt oleku q_3:



Eemaldame oleku q_1:



Eemaldame oleku q_2:



Seega saime regulaaravaldise $(11^*0 \cup 0)(1(11^*0 \cup 0) \cup 01^*0)^*$.

Teises järjekorras olekuid eemaldades võime saada regulaaravaldise, millel on teine väliskuju, kuid mis kirjeldab ikka sama keelt.

3. Tõesta, et järgmised keeled ei ole regulaarsed:

(a) $\mathcal{L} = \{w\#x \mid x \text{ on } w \text{ alamsõne}\}$, kus $\Sigma = \{0, 1, \#\}$;

(b) $\mathcal{L} = \left\{1^{n^2+1} \mid n \geq 0\right\}$, kus $\Sigma = \{1\}$.

Lahendus. (a) Oletame, et keel on regulaarne. Olgu p pumpamislemmast saadav positiivne täisarv. Vaatleme sõnet $s = 0^p\#0^p$. Siis $s \in \mathcal{L}$ ja $|s| \geq p$. Järelikult $s = xyz$, kus iga $i \geq 0$ puhul $xy^iz \in \mathcal{L}$ ning $|y| > 0$ ja $|xy| \leq p$. Viimase võrratuse tõttu koosneb sõne y ainult nullidest. Nüüd aga $xz \notin \mathcal{L}$, sest selles sõnes on sümbolist $\#$ vasakul vähem kui p nulli. Seetõttu ei saa vasak osa sisaldada alamsõnet 0^p. Vastuolu pumpamislemmaga. Järelikult ei ole keel $\mathcal{L}$ regulaarne.

(b) Oletame, et $\mathcal{L}$ on regulaarne. Olgu p pumpamislemmast saadud „pumpamispikkus". Valime $w = 1^{p^2+1} \in \mathcal{L}$. Siis $|w| = p^2 + 1 \geq p$. Järelikult $w = xyz$, kus iga $i \geq 0$ korral $xy^iz \in \mathcal{L}$.

Vaatleme sõnet $xyyz$. Et $|y| \leq |xy| \leq p$, siis $|xyyz| \leq p^2 + 1 + p$. Et $|y| > 0$, siis $|xyyz| > p^2 + 1$. Kuna

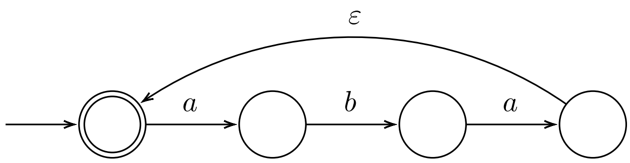
$$p^2 + 1 < |xyyz| \leq p^2 + 1 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 < (p+1)^2 + 1,$$

siis on sõne xyz pikkus rangelt arvude $p^2 + 1$ ja $(p+1)^2 + 1$ vahel. See tähendab, et $xyyz \notin \mathcal{L}$. Saime vastuolu. Järelikult $\mathcal{L}$ ei ole regulaarne.

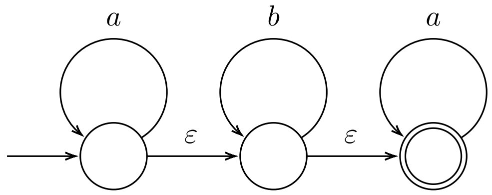
4. Kas järgmine keel on regulaarne või mitte, kus $\Sigma = \{a, b\}$? (Esita vastus koos tõestusega.)

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \mathcal{L} = & \left\{(aba)^n \mid n \geq 0\right\}; \\
\text{(b)} & \mathcal{L} = & \left\{a^n b^m a^\ell \mid n, m, \ell \geq 0\right\}; \\
\text{(c)} & \mathcal{L} = & \left\{a^n b^m a^n \mid n, m \geq 0\right\}.
\end{array}$$

Lahendus. (a) Keel on regulaarne, seda tunneb ära mittedeterministlik lõplik automaat



(b) Keel on regulaarne, seda tunneb ära mittedeterministlik lõplik automaat



(c) Keel ei ole regulaarne. Oletame väitevastaselt, et keel on regulaarne. Olgu p pumpamislemmast saadud pikkus. Vaatleme sõnet $w = a^p b a^p$. Siis $w \in \mathcal{L}$, sest $n = p$, $m = 1$. Pumpamislemma põhjal esitub w kujul $w = xyz$, kus iga $i \geq 0$ puhul $xy^i z \in \mathcal{L}$ ning $|y| > 0$ ja $|xy| \leq p$. Viimase võrratuse põhjal koosneb y ainult nullidest. Vaatleme sõnet $xyyz$. Ühelt poolt $xyyz \in \mathcal{L}$ pumpamislemma põhjal. Teiselt poolt aga $xyyz \notin \mathcal{L}$, sest $xyyz = a^{p+k} b a^p$, kus $k = |y| > 0$, ning $p + k \neq p$. Vastuolu. Järelikult ei ole keel $\mathcal{L}$ regulaarne.