Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

2. kodutöö lahendused

1. (a) Tõesta Newtoni binoomvalemi abil, et

$$n(n-1) \cdot (1+x)^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} \cdot x^{i-2} \ .$$

(b) Järelda sellest, et

$$n(n-1) \cdot 2^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} \ .$$

Lahendus. (a) Newtoni binoomvalemi põhjal

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

See on samasus, mis kehtib iga reaalarvu x puhul. Leiame võrduse mõlemast poolest teise tuletise:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} x^{i-2}.$$

Sellega saamegi vajaliku võrduse. Summas algavad indeksid 2-st, sest indeksitele 0 ja 1 vastavad liikmed muutuvad teise tuletise leidmisel nulliks.

(b) Valime eelmise punkti võrduses $x = 1$. Saame

$$n(n-1) \cdot 2^{n-2} = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}.$$

2. Klassi õpilaste seas

- 15 õpilast armastavad vanillijäätist;
- 18 õpilast armastavad šokolaadijäätist;
- 16 õpilast armastavad maasikajäätist;
- 8 õpilast armastavad vanillijäätist ja šokolaadijäätist;
- 7 õpilast armastavad vanillijäätist ja maasikajäätist;
- 8 õpilast armastavad šokolaadijäätist ja maasikajäätist;
- 5 õpilast armastavad kõiki kolme liiki jäätist;
- 4 õpilast ei armasta ühtegi liiki jäätist.

Mis on selle klassi õpilaste koguarv?

Lahendus. Kasutame elimineerimisvalemit. Toome sisse kolm omadust: $P_1 =$ „armastab vanillijäätist", $P_2 =$ „armastab šokolaadijäätist" ja $P_3 =$ „armastab maasikajäätist". Ülesande tingimuste põhjal

- $W(1) = W(P_1) + W(P_2) + W(P_3) = 15 + 18 + 16 = 49$
- $W(2) = W(P_1, P_2) + W(P_1, P_3) + W(P_2, P_3) = 8 + 7 + 8 = 23$
- $W(3) = W(P_1, P_2, P_3) = 5$
- $E(0) = 4$

Elimineerimisvalemi põhjal $E(0) = W(0) - W(1) + W(2) - W(3)$ ehk

$$4 = W(0) - 49 + 23 - 5.$$

Siit $W(0) = 35$, mis ongi ülesande vastus.

3. Tudeng veeretab 10 ühesugust täringut, iga täringu tahkudele on kirjutatud kuus numbrit: 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Kui palju leidub võimalikke tulemusi, kus esinevad kõik 6 numbrit?

Lahendus 1. Võtame kõigepealt igast numbrist ühe eksemplari, sellega on kindlustatud, et visketulemustes on kõik numbrid esindatud. Neile lisaks tuleb valida 6 numbri hulgast veel 4 numbrit, kusjuures kordumised on lubatud. Selleks on võimalusi

$$\left(\!\!\binom{6}{4}\!\!\right) = \binom{6+4-1}{4} = 126.$$

Lahendus 2. Kasutame elimineerimismeetodit. Defineerime omadused $P_i =$ „tulemuste hulgas ei esine numbrit i“, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Leiame, kui palju on visketulemusi, millel pole ühtegi neist omadustest.

Arvutame elimineerimisvalemis esinevad suurused $W(r)$, $0 \leq r \leq 6$. Paneme tähele, et $W(r)$ on summa, milles on $\binom{6}{r}$ liiget, sest nii mitmel viisil saab 6 omaduse hulgast välja valida r omadust. Kui r omadust on fikseeritud, siis visketulemusi, millel on need r omadust, on $\left(\!\binom{6-r}{10}\!\right)$, sest nii palju on võimalusi jaotada järelejäänud $6-r$ numbrit 10 täringule. Seega $W(r) = \binom{6}{r}\left(\!\binom{6-r}{10}\!\right)$. Elimineerimisvalemi põhjal on visketulemusi, millel pole ühtegi vaadeldavat omadust,

$$E(0) = \sum_{r=0}^{6}(-1)^r W(r) = \sum_{r=0}^{6}(-1)^r \binom{6}{r}\left(\!\binom{6-r}{10}\!\right) =$$
$$= 1 \cdot 3003 - 6 \cdot 1001 + 15 \cdot 286 - 20 \cdot 66 + 15 \cdot 11 - 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 126.$$

Küsimus. Kui palju leidub ülesande tingimustele vastavaid visketulemusi siis, kui kõik täringud on erinevad?

4. Teatrisse tuli n džentelmeni ning igaüks andis riidehoiutädi kätte oma mütsi ja mantli. Kui nad hiljem teatrist lahkusid, polnud ühtegi džentelmeni, kes oleks saanud tagasi nii oma mütsi kui ka oma mantli. Eeldame, et kõik mütsid ja mantlid on erinevad. Mitmel viisil saab see nii juhtuda?

Lahendus. Tähistagu P_i omadust, et i-s džentelmen saab tagasi nii oma mütsi kui ka oma mantli. Kasutame elimineerimisvalemit. Ülesande vastus on võimaluste arv $E(0)$, mis ei rahulda ühtegi omadust.

Suuruse $W(r)$ leidmiseks ($0 \leq r \leq n$) valime n džentelmenist välja r, kellele anname tagasi isikliku mütsi ja isikliku mantli, ning ülejäänud mütsid ja ülejäänud mantlid jaotame ülejäänute vahel. Võimalusi valida n džentelmenist välja r on $\binom{n}{r}$. Võimalusi jaotada ülejäänud $n-r$ džentelmeni vahel ülejäänud mütsid on $(n-r)!$. Võimalusi jaotada ülejäänud džentelmenide vahel ülejäänud mantlid on samuti $(n-r)!$. Järelikult $W(r) = \binom{n}{r}(n-r)!\,(n-r)!$. Elimineerimisvalemi põhjal nüüd

$$E(0) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{n}{r}(n-r)!\,(n-r)! = n!\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n-r)!}{r!}.$$

5. Esita järgmise samasuse kombinatoorne tõestus:

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{n}{r} \cdot 3^{n-r} = 2^n ,$$

kus n on positiivne täisarv.

Lahendus. Vaatleme n-kohalisi arve, mis koosnevad numbritest 1, 2 ja 3. Defineerime omadused $P_i =$ „arvu i-ndal kohal asub 1“ $(1 \leq i \leq n)$. Arvutame elimineerimisvalemis esinevad suurused $W(r)$ $(0 \leq r \leq n)$.

Vaadeldava n omaduse hulgast saab r omadust valida $\binom{n}{r}$ viisil. Arvud, millel on valitud r omadust, on sellised, kus neile omadustele vastaval r kohal on ühed ja ülejäänud $n-r$ kohal igaühel kas 1, 2 või 3. Selliseid arve on 3^{n-r}. Järelikult $W(r) = \binom{n}{r}3^{n-r}$. Elimineerimisvalemi põhjal on arve, millel pole ühtegi omadust, $\sum_{i=0}^{n}(-1)^r W(r) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^r \binom{n}{r}2^{n-r}$. Teisalt aga on arv, millel ühtegi neist omadustest pole, selline, mis koosneb ainult numbritest 2 ja 3. Niisuguseid arve on 2^n. Järelikult $\sum_{i=0}^{n}(-1)^r \binom{n}{r}3^{n-r} = 2^n$, mida oligi tarvis tõestada.

Märkus. Algebraliselt järeldub see võrdus otseselt Newtoni binoomvalemist $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$, kui võtta seal $x = -1$ ja $y = 3$.