Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2016

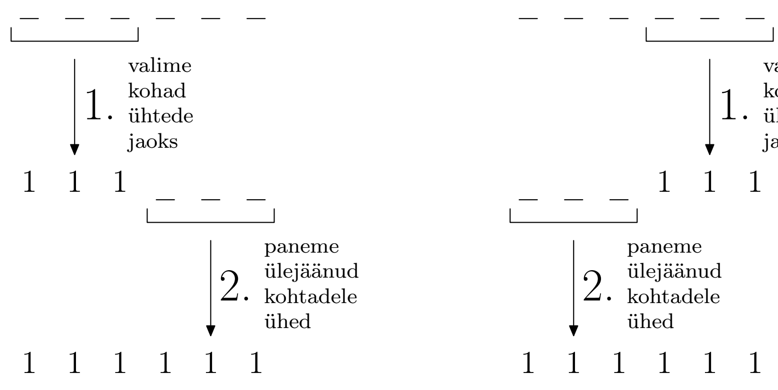
1. kodutöö lahendused

1. Kursuse Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse kodutöös oli järgmine küsimus: „Kui palju leidub kahendvektoreid pikkusega n, milles on ülimalt m nulli?“. Üks tudeng kirjutas lahenduseks: „Kõigepealt valime välja $n-m$ kohta ühtede jaoks. Seejärel paneme ülejäänud m kohale igaühele kas nulli või ühe. Järelikult vastus on $\binom{n}{n-m} \cdot 2^m$.“

(a) Selgita, milles seisneb viga esitatud lahenduses.

(b) Mis on õige vastus?

Lahendus. (a) Pakutud lahenduses loetakse osa kahendvektoreid mitu korda. Näiteks kahendvektori, mis koosneb ainult ühtedest, saame nii juhul, kui valime ühtede jaoks esimesed $n-m$ kohta ja paneme viimasele m kohale ühed, kui ka juhul, kui valime ühtede jaoks viimased $n-m$ kohta ja paneme esimesele m kohale ühed. Tegevuste sooritamise käik on kummalgi juhul erinev, aga tulemus sama.



Seega aetakse pakutud lahenduses segamini kahendvektori moodustamise protsess ja selle protsessi lõpptulemus.

(b) Niisuguses kahendvektoris võib olla 0 või 1 või … või m nulli. Et saada kahendvektor, milles on i nulli, $0 \leq i \leq m$, valime n kohast välja i

kohta, kuhu paneme nullid; ülejäänud kohtadele paneme ühed. Seega i nulliga kahendvektoreid on $\binom{n}{i}$. Liitmisreegli põhjal on lubatud nullide arvuga kahendvektoreid kokku

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}.$$

2. Kui palju leidub 6-numbrilisi PIN-koode, mis ...

(a) ei sisalda numbreid 3, 5 ega 6?

(b) koosnevad numbritest 2, 2, 4, 4, 4, 7 ja ei sisalda kahte järjestikust numbrit 2?

Lahendus. (a) Meil on 6 järjestikust kohta, millest igaühele saab valida numbri 7 viisil (kokku on 10 numbrit, millest 3 on keelatud). Selliste telefoninumbrite arv on $7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7 = 7^6 = 117\,649$.

(b) Meil on vaja 6 kohale ära paigutada 6 numbrit:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{7}$$

Kui kitsendusi ei oleks, siis saaks seda teha $\frac{6!}{2!\,3!\,1!}$ viisil, vastavalt multihulga permutatsioonide valemile. Kuid siit tuleb maha arvata variandid, kus kaks numbrit 2 asuvad kõrvuti. Nende variantide kokkulugemiseks käsitame kahte kõrvutist numbrit 2 ühe numbrina. Siis on meil vaja ära paigutada üks „number“ 2, kolm numbrit 4 ja üks number 7:

$$\boxed{22} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \quad \boxed{7}$$

Seda saab teha $\frac{5!}{1!\,3!\,1!}$ viisil. Järelikult variante, kus kaks numbrit 2 ei asu kõrvuti, on

$$\frac{6!}{2!\,3!\,1!} - \frac{5!}{1!\,3!\,1!} = 40.$$

3. Tõesta, et

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k!\,(n-2k)!}\,,$$

kus $n \geq 2k$, kahel viisil:

(a) algebraliselt;

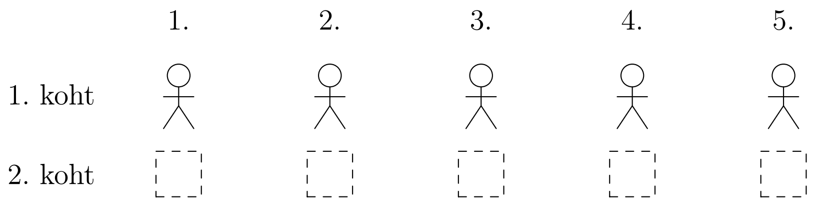
(b) kombinatoorset tõestust kasutades. (Juhis: mitmel viisil saab valida n inimese hulgast k paari?)

Lahendus. (a) Kasutame binoomkordajate valemit:

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!} \cdot k! = \frac{n!}{k!\,(n-2k)!}.$$

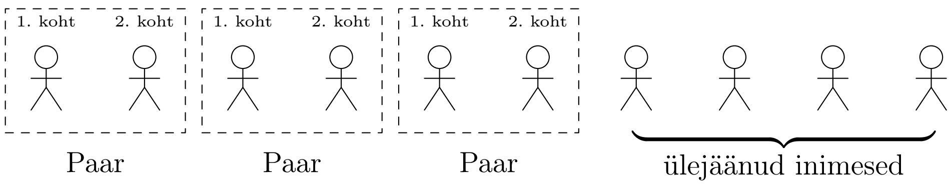
(b) Loendame, mitmel viisil saab n inimese hulgast moodustada k järjestatud paari. „Järjestatud“ tähendab, et igas paaris on 1. koht ja 2. koht erinevad.

Võrduse vasaku poole saamiseks valime kõigepealt n inimesest välja k inimest paaride 1. kohtade jaoks. Seda saab teha $\binom{n}{k}$ viisil. Paigutame need k inimest kindla reegli järgi ritta, näiteks nimede tähestikulises järjestuses:



Seejärel valime ülejäänud $n-k$ inimesest välja veel k inimest. Seda saab teha $\binom{n-k}{k}$ viisil. Need k inimest saab paaride 2. kohtadele paigutada $k!$ viisil. Iga kaks kokkusattunud inimest moodustavad ühe järjestatud paari. Seega saab paare koostada $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}k!$ viisil.

Võrduse parema poole saamiseks paigutame n inimest ühte ritta, selleks on $n!$ võimalust. Seejärel loeme, et rea esimene ja teine inimene moodustavad paari, kusjuures esimene inimene asub 1. kohal ja teine inimene 2. kohal. Analoogiliselt moodustavad kolmas ja neljas inimene paari, kolmas inimene 1. kohal ja neljas 2. kohal, jne kuni inimesed $2k-1$ ja $2k$ moodustavad paari, kus inimene $2k-1$ on 1. kohal ja inimene $2k$ on 2. kohal.



Nüüd paneme tähele, et 1) paaride omavaheline järjekord ei ole oluline, mistõttu võime esimest $2k$ inimest paaridena $k!$ viisil ümber paigutada nii, et tekib ikka sama paarideks jaotus, ning 2) viimase $n-2k$ inimese omavaheline järjekord ei ole oluline, mistõttu nende inimeste ümberjärjestused, mida on kokku $(n-2k)!$, annavad kõik sama paarideks jaotuse. Järelikult saab n inimese hulgast k paari moodustada $\frac{n!}{k!\,(n-2k)!}$ viisil.

Kuna me loendame ühte ja sama võimaluste arvu kahel moel, siis peavad ka tulemused olema võrdsed. Seega $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k!\,(n-2k)!}$.

4. Mitu erinevat sõna saab koostada tähtedest

A, U, T, O, M, A, A, T

järgmistel tingimustel? (Iga tähte sellest loendist tuleb kasutada täpselt üks kord. Sõna ei pea olema inimkeeles esinev sõna. Näiteks „TUOMATAA“ on lubatud, aga „AUTO“ mitte.)

(a) Kitsendusi pole.

(b) Sõna algab tähega U ja lõpeb tähekombinatsiooniga MA.

(c) Sõnas ei esine alamjada TT.

Eeldame nüüd, et iga tähte A, U, O, M, T võib kasutada piiramatu arv kordi.

(d) Mitu sõna pikkusega 8 (ilma kitsendusteta) on võimalik koostada?

Lahendus. (a) Tegemist on multihulga permutatsiooniga, kus multihulga elementide A, U, T, O, M kordsused on vastavalt 3, 1, 2, 1, 1. Multihulga permutatsioonide valemi põhjal on vastus

$$\frac{8!}{3!\,1!\,2!\,1!\,1!} = 3360.$$

(b) Paneme sõna esimesele kohale tähe U ja kahele viimasele kohale tähed M ja A. Jääb 5 vahepealset kohta, millele tuleb panna tähed A, A, T, T, O. Multihulga permutatsioonide valemi põhjal saame seda teha

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

viisil.

(c) Punkti (a) põhjal saab nendest tähtedest moodustada üldse 3360 sõna. Leiame, kui palju on sõnu, milles esineb alamjada TT. Selleks vaatleme tähti TT ühe tähena. Seega on meil tegemist multihulgaga, mille elemendid on A, U, TT, O, M kordsustega vastavalt 3, 1, 1, 1, 1. Selle multihulga permutatsioone ehk sõnu, kus esineb TT, on

$$\frac{7!}{3!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 840.$$

Sõnu, kus ei esine TT, on järelikult $3360 - 840 = 2520$.

(d) Tegemist on kordumistega permutatsioonidega. Sõna esimesele kohale võime valida tähe 5 viisil. Sõna teisele kohale võime valida tähe samuti 5 viisil, sest iga tähte võib teisel kohal uuesti kasutada. Niimoodi kõikide kohtadega. Kokku on sõnu $5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 = 5^8 = 390\,625$.

5. Tudeng veeretab viit ühesugust täringut, iga täringu tahkudele on kirjutatud kuus numbrit: 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Kui palju on võimalikke tulemusi, kui ...

(a) kitsendusi pole?

(b) number 3 esineb vähemalt kaks korda?

(c) number 3 esineb ülimalt kaks korda?

Lahendus. (a) Kuna täringud on ühesugused, siis on oluline ainult see, mitu korda iga number välja tuleb. Tegemist on kordumistega kombinatsioonidega, kus 6 numbrist 1, 2, 3, 4, 5, 6 tuleb välja valida 5 numbrit, kusjuures kordumised on lubatud. Kordumistega kombinatsioonide valemi põhjal on võimaluste arv

$$\left(\binom{6}{5}\right) = \binom{6+5-1}{5} = 252.$$

(b) Võtame kõigepealt kaks numbrit 3. Sellega garanteerime, et number 3 esineb vähemalt kaks korda. Neile lisaks valime 6 numbrist veel mingid 3 numbrit nii, numbrid võivad korduda. Seega võimaluste arv on

$$\left(\binom{6}{3}\right) = \binom{6+3-1}{3} = 56.$$

Teine lähenemine. Lahutame eelmise punkti võimaluste arvust need võimalused, kus number 3 esineb 0 korda või 1 kord.

- Kui number 3 esineb 0 korda, siis tuleb 5 numbrist 1, 2, 4, 5, 6 valida 5 numbrit, kusjuures numbrite kordumised on lubatud. Selleks on $\left(\binom{5}{5}\right) = \binom{5+5-1}{5} = 126$ võimalust.
- Kui number 3 esineb 1 kord, siis tuleb ülejäänud 5 numbrist valida veel 4 numbrit. Selleks on $\left(\binom{5}{4}\right) = \binom{5+4-1}{4} = 70$ võimalust.

Kokku on sobivaid võimalusi $252 - 126 - 70 = 56$.

(c) Lahutame punkti (a) võimaluste arvust need võimalused, kus number 3 esineb kolm või rohkem korda. Nende võimaluste arvu leidmiseks võtame kolm numbrit 3 ja valime neile lisaks 6 numbri hulgast veel 2. Seda saab teha $\left(\binom{6}{2}\right) = \binom{6+2-1}{2} = 21$ viisil. Küsitud võimaluste arv on seega $252 - 21 = 231$.

Teine lähenemine. Number 3 võib esineda 0 või 1 või 2 korda. Võimalusi, kus number 3 esineb 0 korda, on eelmise punkti põhjal 126. Võimalusi, kus number 3 esineb 1 kord, on 70. Kui number 3 esineb 2 korda, siis tuleb ülejäänud 5 numbrist valida veel 3 numbrit. Selleks on $\left(\binom{5}{3}\right) = \binom{5+3-1}{3} = 35$ võimalust. Ülesande vastus on $126 + 70 + 35 = 231$.