MTAT.05.125: Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse **Tartu Ülikool**

Eksam

Juhendajad: Vitaly Skachek, Yauhen Yakimenka, Reimo Palm 14. jaanuar 2016

Üliõpilase nimi: ____

Matriklinumber: ____

1. Selles eksamitöös on 10 lehekülge. Kontrolli, et ükski lehekülg ei puudu.
2. Koguda võib kuni 120 punkti. Püüa koguda nii palju punkte kui võimalik.
3. Kõik vastused anna koos põhjenduste ja tõestustega (kus kohane).
4. Lahenduses võib ilma tõestuseta kasutada kõiki fakte ja tulemusi, mis tõestati või sõnastati tunnis. Sellised tulemused tuleb korrektselt formuleerida.
5. Kõik prinditud ja kirjalikud materjalid on lubatud. Elektroonilised seadmed ei ole lubatud.
6. Eksam kestab 2 tundi.
7. Palju edu!

1. ülesanne	
2. ülesanne	
3. ülesanne	
4. ülesanne	
Kokku	

1. ülesanne (20 punkti).

Millised järgmistest võrdustest on tõesed või väärad? Põhjenda vastuseid.

(a) $n^{10} \cdot \log n = O(n^{10} + n^9)$;

(b) $2^n = o(3^n)$;

(c) $(\log_2 n)^2 = O(\sqrt{n})$.

2. ülesanne (35 punkti).

Defineerime keele

$$\mathcal{L}_7 = \left\{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ on Turingi masin ja } L(\mathcal{M}) = \{0^n 1^{7n} \mid n \in \mathbb{N}\} \right\} .$$

Selles ülesandes näitad, et $\mathcal{L}_7$ on mittelahenduv keel.

__**Juhis:**__ näiteks võid kasutada taandamist keelelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$. Eeldame, et leidub Turingi masin $\mathcal{M}_7$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_7$. Konstrueeri Turingi masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$, kus

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TM}} = \{ \langle \mathcal{M}, w \rangle \mid \mathcal{M} \text{ on Turingi masin ja } \mathcal{M} \text{ aktsepteerib sisendsõnet } w \} .$$

Sisendil $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ teeb masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ järgmist.

1. Konstrueerib masina $\mathcal{M}_w$, mis sisendil x teeb järgmist.
   (a) „Simuleerib“ masina $\mathcal{M}$ töökäiku sõnel w.
   (b) Kui $\mathcal{M}$ peatub tagasilükkamisega, siis $\mathcal{M}_w$ peatub tagasilükkamisega.
   (c) Kui $\mathcal{M}$ peatub aktsepteerimisega, siis $\mathcal{M}_w$ kontrollib, kas sõne x on kujul $0^n 1^{7n}$, $n \in \mathbb{N}$. Kui jah, siis peatub aktsepteerimisega. Kui ei, siis peatub tagasilükkamisega.
2. Teeb masina $\mathcal{M}_7$ abil kindlaks, kas $L(\mathcal{M}_w) = \{0^n 1^{7n}\}$. Kui jah, siis peatub aktsepteerimisega. Kui ei, siis peatub tagasilükkamisega.

Vii lõpule taandamise detailid, kui vaja, ja näita, et $\mathcal{L}_7$ on mittelahenduv keel.

3. ülesanne (25 punkti).

<u>Definitsioon:</u> suunamata graafi $\mathcal{G}$ *tsenter* on selline tipp v, et graafi $\mathcal{G}$ iga tipu u puhul, kus $v \neq u$, leidub suunamata serv tippude u ja v vahel. (Teiste sõnadega, tsenter on tipp, mis on ühendatud kõigi ülejäänud tippudega.)

Defineerime keele $\mathsf{LEIDUBTSENTER}$:

$$\mathsf{LEIDUBTSENTER} = \{\langle \mathcal{G}, v \rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf tsentriga } v\ \} \ .$$

Kas $\mathsf{LEIDUBTSENTER} \in \mathcal{P}$? Põhjenda vastust.

4. ülesanne (40 punkti).

Definitsioon: suunamata graafi $\mathcal{G}$ *sõltumatu hulk* on selline tippude hulk S, et hulga S iga kahe tipu u, v puhul serv tippude u ja v vahel puudub.

Defineerime keele SÕLTUMATU-HULK:

$$\textsf{SÕLTUMATU-HULK} = \{\langle \mathcal{G}, k\rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf, kus leidub sõltumatu hulk suurusega } k\} \ .$$

Selles ülesandes näitad, et SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik.

(a) Tõesta, et SÕLTUMATU-HULK $\in \mathcal{NP}$.

(b) Tõesta, et SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-raske.

Juhis: võid keele KLIKK polünomiaalselt taandada keelele SÕLTUMATU-HULK. Meenutame, et keel KLIKK on defineeritud järgmiselt:

$$\textsf{KLIKK} = \{\langle \mathcal{G}, k\rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf, kus leidub klikk suurusega } k\} \ .$$

On teada (näidati tunnis), et KLIKK on $\mathcal{NP}$-täielik.