Loeng 3

Samaselt tõesus, samaväärsus, järeldumine

Predikaatloogika põhiseadused

§4. Samaselt tõesed, kehtestatavad ja samaselt väärad valemid. Valemite samaväärsus, järeldumine

Loomulik on samaselt tõesuseks nõuda tõesust igas interpretatsioonis.

Aga kui valemis on vabu muutujaid, siis on valemile tõeväärtuse andmiseks vaja määrata ka vabade muutujate väärtused.

Definitsioonid

Def. Valemit A signatuuris σ nimetatakse

- **samaselt tõeseks**, kui ta on tõene σ igas interpretatsioonis valemi vabade muutujate kõikidel väärtustel;
- **samaselt vääraks**, kui ta on väär σ igas interpretatsioonis valemi vabade muutujate kõikidel väärtustel,
- **kehtestatavaks**, kui ta on tõene vähemalt ühes σ interpretatsioonis valemi vabade muutujate mingitel väärtustel.

Nende mõistete kasutamisel ei ole signatuurile viitamine tegelikult tarvilik. Võime vaadelda niisuguse signatuuri interpretatsioone, mis koosneb parajasti valemis A esinevatest sümbolitest.

Seosed mõistete vahel

Teor. 1. Valem A on samaselt tõene parajasti siis, kui $\neg A$ on samaselt väär. Valem A on samaselt väär parajasti siis, kui $\neg A$ on samaselt tõene.

Teor. 2. Valem A on kehtestatav parajasti siis, kui $\neg A$ pole samaselt tõene.

Tõestused on elementaarsed.

Järeldumine ja samaväärsus

- **Def.** Olgu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ja B valemid signatuuris σ.
  Valemitest $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **järeldub** valem B,
  kui σ iga interpretatsiooni ja vabade muutujate kõikide väärtuste korral kehtib:
  kui valemid $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on tõesed, on ka valem B tõene.

Tähistus: $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$

- Tihti tuleb tegelda juhuga $n = 1$, st küsimusega, kas valemist A järeldub B.

- **Def.** Valemeid A ja B signatuuris σ nimetatakse

loogiliselt samaväärseteks, kui σ igas interpretatsioonis vabade muutujate kõikidel väärtustel A ja B tõeväärtused on võrdsed.

Tähistus: $\mathrm{A} \equiv B$

- Kas nendes definitsioonides on eelnev signatuuri fikseerimine vajalik?

Seosed

Teor. 3. Valemitest $A_1, A_2, \ldots, A_n$ järeldub valem B parajasti siis, kui valem $A_1 \& \ldots \& A_n \supset B$ on samaselt tõene.

Teor. 4. Valemid A ja B on loogiliselt samaväärsed parajasti siis, kui valem $A \sim B$ on samaselt tõene.

Teor. 5. Valemid A ja B on loogiliselt samaväärsed parajasti siis, kui valemist A järeldub B ja valemist B järeldub A .

Tõestused on elementaarsed.

Churchi teoreem

- Erinevalt lausearvutusest, toodud **definitsioonid ei anna meile algoritmi** samaselt tõesuse, samaselt vääruse, kehtestatavuse jne kontrolliks, sest tuleks läbi vaadata lõpmata palju interpretatsioone.
- Teoreem (A. Church, 1936). Ei leidu algoritmi, mis suudaks suvalise predikaatloogika valemi puhul kindlaks teha, kas valem on samaselt tõene.
- Churchi tulemus tähendab ka samaselt vääruse, kehtestatavuse, samaväärsuse ja järeldumise probleemide algoritmilist mittelahenduvust.

Kui palju on erinevaid interpretatsioone?

Kui interpretatsiooni kandjas on m elementi, siis

1) *Konstantsümbolit* saab interpreteerida m viisil,

2) n-kohalisele *funktsionaalsümbolile* seatakse vastavusse n-kohaline funktsioon. Tema n argumenti saavad võtta m^n erinevat väärtust, igaühel nendest väärtustes saab funktsioon võtta ühe m väärtusest. Kokku: $m^{(m^n)}$ erinevat funktsiooni.

3) n-kohalisele *predikaatsümbolile* seatakse vastavusse n-kohaline predikaat. Tema n argumenti saavad võtta m^n erinevat väärtust, igaühel nendest väärtustes saab funktsioon võtta ühe väärtusest t ja v. Kokku: $2^{(m^n)}$ erinevat predikaati.

Samaselt tõesuse jms kontroll

1. Igasuguse lõpliku võimsusega ja loenduva interpretatsioonide vaatlemine on vajalik, sest
   1) Saab konstrueerida valemi, mis on tõene parajasti siis, kui kandjas on n elementi:

   A_1: $\forall x \forall y (x = y)$

   A_2: $\exists x \exists y \neg (x = y) \&$

   $\neg \exists x \exists y \exists z [\neg (x = y) \& \neg (y = z) \& \neg (x = z)]$ jne

   2) Saab konstrueerida kehtestatava valemi, mis on väär igas lõpliku kandjaga interpretatsioonis.

$$\forall x \exists y A(x, y) \ \& \ \forall x \neg A(x, x) \ \&$$

$$\& \forall x \forall y \forall z [A(x, y) \& A(y, z) \& \supset A(x, z)]$$

2. Kui signatuur on lõplik või loenduv, siis loenduvast suuremate kandjate vaatlemine pole vajalik.

§ 5. Predikaatloogika põhiseadused

- Nagu lausearvutuses, teeme ka predikaatloogika jaoks kindlaks rea samaväärsusi ja samaselt tõeseid valemeid
- Predikaatloogika seaduste jaoks ei leidu üldist tõestamise algoritmi, vaid iga seadus vajab individuaalset tõestust
- Tegelikult ütlevad valemite kujud meile enamiku tõestussammudest ikkagi ette

Asendus lausearvutuse tautoloogiasse

Teoreem. Kui $A(X_1, \ldots, X_n)$ on samaselt tõene lausearvutuse valem ja $B_1, \ldots, B_n$ on valemid ühes ja samas signatuuris , siis $A(B_1, \ldots, B_n)$ on samaselt tõene valem.

Tõestus: Kui on antud interpretatsioon ja vabade muutujate väärtused, siis

valemi $A(B_1, \ldots, B_n)$ tõeväärtuse leidmiseks tuleb

1) leida valemite $B_1, \ldots, B_n$ tõeväärtused,
2) teha nendega valemis A olevad tehted.

Valemi A samaselt tõesuse tõttu annavad need tehted tulemuseks tõeväärtuse t.

Peale selle kehtib predikaatloogikas veel rida kvantorite kohta käivaid seadusi, mida me järgnevalt tõestame

Predikaatloogika põhiseadused

1. $\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$,
   $\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$.

2. $\forall x\big(A(x) \& B(x)\big) \equiv \forall x A(x) \,\&\, \forall x B(x)$,
   $\exists x\big(A(x) \vee B(x)\big) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

3. $\forall x\big(A \oplus B(x)\big) \equiv A \oplus \forall x B(x)$,
   $\exists x\big(A \oplus B(x)\big) \equiv A \oplus \exists x B(x)$ (kus $\oplus$ on $\&, \vee$ või $\supset$ (aga mitte $\sim$))

4. $\forall x(A(x) \supset B) \equiv \exists x A(x) \supset B$,
   $\exists x(A(x) \supset B) \equiv \forall x A(x) \supset B$.

5. $\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$,
   $\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$ (kus $A(x)$ ei sisalda muutujat y)

6. $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$,
   $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$.

7. $\exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$ on samaselt tõene

8. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x\big(A(x) \vee B(x)\big)$,
   $\exists x\big(A(x) \& B(x)\big) \supset \exists x A(x) \& \exists x B(x)$ on samaselt tõesed.

9. $\forall x A(x) \supset A(t)$, $A(t) \supset \exists x A(x)$, $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$
   on samaselt tõesed (kus t ei sisalda valemis A seotud muutujaid)