Loeng 2

- **Punktide jaotus:**
  kodutööd 15,
  nädalatestid 5,
  kontrolltööd 20+20,
  eksam 40,
  lisapunktid
- **Kontrolltööd** sisaldavad ka testile vastamist

P2 - tuleb
P1 lahendus

$T_{P\sim Q} = \{ x \mid P(x) \sim Q(x) = t\} =$

$= \{x \mid P(x) \land Q(x) \lor \neg P(x) \land \neg Q(x) = t\} =$

$= \{x \mid x \in T_P \land x \in T_Q \ \lor \ x \in M^n \setminus T_P \land x \in M^n \setminus T_Q\} =$

$= \{x \mid x \in T_P \cap T_Q \ \lor \ x \in M^n \setminus T_P \cup T_Q\} =$

$= \{x \mid x \in (T_P \cap T_Q) \cup (T_P \cup T_Q)' \} =$

$= (T_P \cap T_Q) \cup (T_P \cup T_Q)' =$

$= M^n \setminus (T_p \Delta T_Q) =$

$= (T_p \Delta T_Q)'$

Kvantorite definitsioonid

Olgu $P(x_1, \dots, x_n)$ hulgal M defineeritud n-kohaline predikaat.
Siis iga $i \leq n$ puhul tähistavad $\forall x_i P(x_1, \dots, x_n)$ ja
$\exists x_i P(x_1, \dots, x_n)$ järgmisi (n-1)-kohalisi predikaate:

$$\forall x_i P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} t, \text{kui } x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \text{ on sellised, et} \\ \quad \text{iga } x_i \epsilon M \text{ korral } P(x_1, \dots, x_n) = t \\ \quad v \text{ vastasel juhul} \end{cases}$$

$$\exists x_i P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} t, \text{kui } x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \text{ on sellised, et} \\ \quad \text{leidub } x_i \epsilon M, \text{mille puhul } P(x_1, \dots, x_n) = t \\ \quad v \text{ vastasel juhul} \end{cases}$$

§3. Esimest järku keeled

Esimest järku keeled on lihtsaim keelte kategooria, milles saab juba üles kirjutada mõnede matemaatikavaldkondade väiteid (aritmeetika (arvuteooria), algebralised süsteemid, väited konkreetsete funktsioonide kohta).

Fikseerimata funktsioonide, alamhulkade, predikaatide jne kirjeldamiseks on aga vaja teist järku objekte – funktsionaal- ja predikaatmuutujaid.

Signatuur

Esimest järku keele **signatuur** on kolmik $< C, F, P >$, kus
C on **konstantsümbolit**e hulk,
F on **funktsionaalsümbolite** hulk ja
P **predikaatsümbolite** hulk.

Signatuuris peab hulk P olema mittetühi.

Signatuuride näiteid

Naturaalarvude aritmeetikat pannakse kirja signatuurides

$< 0;\, ' \,, +,\ \cdot\, ; => ,$

$< 0, 1; +,\ \cdot\, ; => ,$

$< 0, 1, 2, \ldots, 2016, \ldots; +, \cdot\, ; =>$

-, :, võrratuse märgid jms väljendatakse signatuuri kaudu

Rühmateooriat saab kirja panna signatuuris

$< e; \cdot\, ; =>$ või $< e; \cdot, {}^{-1}; =>$

Vektorruumide teooriast saab väikese osa kirja panna keeles, kus on muutujad vektorite jaoks, konstantsümbolid nullvektori ja ühikvektorite jaoks, funktsionaalsümbol liitmise jaoks. Kõigi aksioomide esitamiseks on vaja kahesordilist keelt, kus on kahte sorti muutujad (vektorid ja skalaarid), skalaaridel liitmistehe ja korrutamistehe, vektoritel liitmistehe.

I järku keele tähestik

1. Indiviidmuutujad,
2. Signatuur $< C, F, P >$,
3. Loogikasümbolid $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, $\sim$, $\forall$, $\exists$
4. Kirjavahemärgid ( ) ,

Term

Term on avaldis, mille väärtuseks on indiviidide piirkonna element. **Defineeritakse** antud signatuuri jaoks, induktsiooniga:

1. Iga indiviidmuutuja on σ term
2. Iga signatuuri σ konstantsümbol on σ term
3. Kui f on signatuuri σ n-kohaline funktsionaalsümbol ja $t_1, \dots, t_n$ on σ termid, siis $f(t_1, \dots, t_n)$ on σ term.

- Kui funktsionaalsümbolite hulk on tühi, siis on ainsateks termideks konstantsümbolid ja muutujad.
- On võimalik, et signatuuris pole konstantsümboleid ega funktsionaalsümboleid.

Valem

- Valem signatuuris defineeritakse induktsiooniga:

1. Kui P on signatuuri σ n-kohaline predikaatsümbol ja $t_1, \dots, t_n$ on termid, siis $P(t_1, \dots, t_n)$ on σ valem.
2. Kui A on σ valem, siis $\neg A$ on σ valem.
3. Kui A ja B on σ valemid, siis $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \sim B)$

on σ valemid.

4. Kui A on σ valem ja x on indiviidmuutuja, siis $\forall x A$ ja $\exists x A$ on σ valemid.

- Definitsiooni esimese punkti järgi saadud valemeid nimetatakse ka atomaarseteks ehk elementaarvalemiteks.
- Signatuuri predikaatsümbolite hulk peab olema mittetühi, sest vastasel korral ei saaks moodustada ühtegi valemit ja ei saaks väljendada väiteid
- Kvantori võib kirjutada ka siis, muutuja x ei esine valemis A või kui A tõeväärtus ei sõltu x-st

Tehete järjekord

- Tehteid teostatakse prioriteedi nõrgenemise järjekorras: $\{\forall, \exists, \neg\}, \&, \vee, \supset, \sim$

ja mittevajalikke sulge jätame ära.

Vabad ja seotud muutujad

Kvantoreid sisse tuues rõhutasime, et valemite $\forall x_i P(x_1, \dots, x_n)$ ja $\exists x_i P(x_1, \dots, x_n)$ tõeväärtus
sõltub muutujate $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ väärtustest,
aga **ei sõltu** muutujast x_i.
Selle kohta öeldakse ka, et kvantor *seob* muutuja x_i.

Def. Muutuja x esinemist (mis pole vahetult kvantori järel) valemis A nimetatakse **seotud esinemiseks**, kui ta asub kvantori $\forall x$ või $\exists x$ mõjupiirkonnas ja **vabaks esinemiseks**, kui ta pole ühegi x-le rakendatud kvantori mõjupiirkonnas.

Ütleme, et **muutuja x on valemis A vaba/seotud**, kui tal leidub vaba/seotud esinemine.

Seega võib muutuja olla valemis korraga nii vaba kui seotud.

Valemis $\forall x(\exists y A(x,y,z) \& \exists z(B(x,y,z)))$ on x esinemised A ja B argumentidena seotud. Muutuja y esinemine A argumendina on seotud, aga B argumendina vaba, z puhul vastupidi.

- Valemi tõeväärtus sõltub ainult vabade muutujate väärtusest.
- Kinnine valem väljendab lauset

- Tavaliselt on matemaatikul uurimisel mingi struktuur ja signatuur valitakse nii, et ta sisaldaks tähiseid uuritavate objektide, funktsioonide ja predikaatide jaoks.
  Huvi pakkuvad väited väljendatakse signatuuri valemitena ja püütakse neid tõestada.
- On aga selge, et ühes ja samas keeles võib saada rääkida erinevatest struktuuridest. Ja sama valem võib ühel struktuuril olla tõene, aga teisel väär. Näiteks

$$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x),$$
$$\forall x \forall y \exists z (x + z = y)$$

- Selle kohta öeldakse, et valemile saab anda erinevaid interpretatsioone. Interpretatsioon peaks fikseerima *muutujate muutumispiirkonna ja signatuuri sümbolite tähendused*
- Mõnedel sümbolitel on matemaatikas mõnede põhihulkade puhul nn. *standardsed interpretatsioonid*

Interpretatsiooni definitsioon

Def. Interpretatsioon on paar $\alpha = (M_\alpha, I_\alpha)$, kus

$\boldsymbol{M_\alpha}$ on mittetühi hulk, mida nimetatakse **põhihulgaks** ehk **interpretatsiooni kandjaks**, ja

$\boldsymbol{I_\alpha}$ **on interpreteeriv kujutus**, mis teisendab

1) iga konstantsümboli $c \epsilon C$ mingiks hulga M_α elemendiks c_α*;*

2) iga n-kohalise funktsionaalsümboli $f \epsilon F$ mingiks (kõikjal määratud) n-kohaliseks funktsiooniks f_α: $M_\alpha \to M_\alpha$*;*

3) iga n-kohalise predikaatsümboli mingiks n-kohaliseks predikaadiks hulgal M_α*.*

Sealjuures interpreteeritakse võrdusmärki alati võrduspredikaadiga.

Funktsionaalsümboli interpretatsioon peab olema kõikjal defineeritud funktsioon.

NB! Interpretatsioon seab ***keele sümbolitele*** *vastavusse* ***matemaatilised objektid*** *(põhihulga elemendid, funktsioonid, predikaadid),*
süntaktilistele *objektidele* ***tähenduse (semantika)****.*

Valemi tõeväärtus

- Interpretatsioon seab vastavusse:
  - muutujateta termile hulga M elemendi,
  - muutujatega termile funktsiooni
  - vabade muutujatega valemile predikaadi
  - kinnisele valemile tõeväärtuse
- Me ei saa rääkida lihtsalt tõestest ja vääradest valemitest. Valemi tõeväärtuse määravad interpretatsioon ja vabade muutujate väärtused
- Mingi konkreetse matemaatilise distsipliiniga tegeldes on interpretatsioon tavaliselt fikseeritud. Algebras vaadeldakse ka erinevaid interpretatsioone

Näited

Olgu meile signatuur $\sigma = \langle 0, 1, 2, \dots, 2016, \dots ; +, \cdot ; =, < \rangle$

Anname kolm erinevat interpretatsiooni:

1. $M = \mathbb{N}$, signatuuri sümboleid interpreteeritakse standardselt.
2. $M = \mathbb{R}$, signatuuri sümboleid interpreteeritakse standardselt.
3. $M =$ {0,1}, $c_\alpha = \begin{cases} 0, \text{kui } c \text{ on paarisarv,} \\ 1, \text{kui } c \text{ on paaritu arv,} \end{cases}$
   liitmine toimub arvu 2 jäägiklassiringis ($1 + 1 = 0$), teiste sümbolite interpretatsioonid on standardsed

Leiame valemite tõeväärtused erinevates interpretatsioonides:

Valem	N	R	B
$0=2$			
$\forall x(x < x + 1)$			
$\forall x \exists y(x < y)$			
$\forall x \exists y(y < x)$			
$\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \;\&\; z < y))$			
$\forall x \forall u \forall v(x + u = x + v \rightarrow u = v)$			
$\forall x \forall y \exists z(x + z = y)$			
$\forall x \forall y \exists z(x \cdot z = y)$			
$\forall x \forall y(\neg(x = 0) \rightarrow \exists z(x \cdot z = y))$			

Predikaatide ja väidete väljendamine valemitega (1)

Tegelikult saame ka mõiste „Valem $A(x_1, \dots, x_n)$ väljendab hulgal M defineeritud predikaati $P(x_1, \dots, x_n)$“ defineerida kui väljendamise antud interpretatsioonis, sest valemi tõesuseks on vaja konkreetset interpretatsiooni.

Def. Valem $A(x_1, \dots, x_n)$ väljendab interpretatsiooni põhihulgal M defineeritud predikaati $P(x_1, \dots, x_n)$, kui iga $x_1, \dots, x_n \in M$ korral kehtib

$$A(x_1, \dots, x_n) = t \Leftrightarrow P(x_1, \dots, x_n) = t.$$

Predikaatide ja väidete väljendamine valemitega (2)

Olgu indiviidide piirkonnaks kõigi inimeste hulk. Signatuur:

M(x) „x on meessoost“,

N(x) „x on naissoost“,

L(x,y) „ x on y laps“,

Väljendada predikaadid:

1) u on v isa,
2) u on v vanaema,
3) u on v vend,
4) u on v poolvend,
5) u on v tädi