Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Kevad 2019

4. Korrapäratused

Korrapäratused

Näide 1. *Riidehoiutädi probleem.* Teatrisse saabus n džentelmeni ning kõik andsid oma silindrid riidehoiutädi kätte. Teatrist lahkudes sai iga džentelmen tagasi silindri, mis polnud tema enda oma (eeldame, et kõik silindrid on erinevad). Mitmel viisil saab see nii juhtuda?

Definitsioon. *Permutatsiooni n elemendist $1, 2, \ldots, n$, kus ükski element i ei asu kohal i, nimetatakse korrapäratuseks ehk püsipunktita permutatsiooniks.*

Lahendus. Seega selles näites soovime leida korrapäratuste arvu. Tähistagu P_i omadust, et džentelmen i saab tagasi enda silindri ($1 \leq i \leq n$). Arvutame elimineerimisvalemis esinevad suurused.

- Kuna loendame n silindri ümberjärjestusi, siis $W(0) = n!$.
- Järjestused, millel on omadus P_i ehk kus džentelmen i saab tagasi oma silindri, võime moodustada nii, et anname kõigepealt džentelmenile i tema silindri ning seejärel jaotame ülejäänud $n-1$ silindrit ülejäänud $n-1$ džentelmeni vahel. Seega $W(P_i) = (n-1)!$. Järelikult $W(1) = W(P_1) + \ldots + W(P_n) = n \cdot (n-1)!$.
- Järjestused, millel on omadused P_i ja P_j ehk kus džentelmenid i ja j saavad mõlemad tagasi oma silindri, saame konstrueerida nii, et anname džentelmenidele i ja j nende silindrid ning jaotame ülejäänud $n-2$ silindrit ülejäänute vahel. Järelikult $W(P_i, P_j) = (n-2)!$ ning $W(2) = W(P_1, P_2) + W(P_1, P_3) + \ldots + W(P_{n-1}, P_n) = \binom{n}{2}(n-2)!$. Siin arvestame, et n omaduse seast saab kaks erinevat omadust i ja j valida $\binom{n}{2}$ viisil.
- Analoogiliselt $W(P_i, P_j, P_k) = (n-3)!$ ja $W(3) = W(P_1, P_2, P_3) + \ldots + W(P_{n-2}, P_{n-1}, P_n) = \binom{n}{3}(n-3)!$ jne kuni lõpuks $W(P_1, P_2, \ldots, P_n) = 1$ ja $W(n) = 1$.

Seega järjestuste arv, kus ükski džentelmen ei saa tagasi oma silindrit, on elimineerimisvalemi põhjal

$$\begin{aligned}
E(0) &= W(0) - W(1) + W(2) - W(3) + \ldots + (-1)^n W(n) = \\
&= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = \\
&= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].
\end{aligned}$$

Korrapäratuste arvu n elemendist tähistatakse tihti sümboliga $D(n)$ või $!n$. Eelnevast valemist järeldub, et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}3679.$$

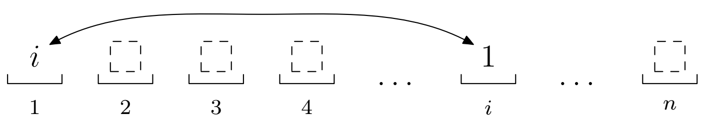
Seega kui anda n džentelmenile silindrid tagasi juhuslikult, siis tõenäosus, et keegi ei saa enda oma, on ligikaudu $1 / \mathrm{e}$.

Näide 2. Tõestada, et $D(n) = (n-1)\big(D(n-1) + D(n-2)\big)$.

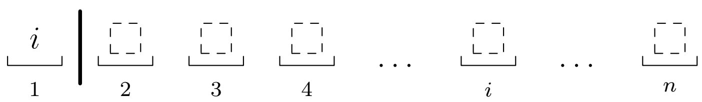
Lahendus. Loendame võimalusi paigutada elemendid $1, 2, \ldots, n$ kohtadele $1, 2, \ldots, n$ nii, et iga element i satuks mujale kui kohale i. Ühelt poolt on selliste paigutusvõimaluste arv $D(n)$.

Teiselt poolt vaatleme kohta 1. Oletame, et paneme kohale 1 elemendi i $(2 \leq i \leq n)$. Nüüd on kaks võimalust.

1. Kui paneme elemendi 1 kohale i, siis elemendid 1 ja i lihtsalt vahetavad kohad. Ülejäänud $n-2$ kohale paigutame ülejäänud $n-2$ elementi nii, et ükski neist ei satuks oma kohale. Seda saab teha $D(n-2)$ viisil.



2. Kui me ei pane elementi 1 kohale i, siis nimetame elemendi 1 ajutiselt ümber elemendiks i. Siis tuleb $n-1$ kohale $2, \ldots, n$ paigutada $n-1$ elementi $2, 3, \ldots,$ uus $i, \ldots, n$ nii, et ükski ei satuks oma kohale. Seda saab teha $D(n-1)$ viisil.



Seega paigutusvõimalusi, kus kohal 1 asub element i, on $D(n-2) + D(n-1)$. Kuna kohale 1 võib panna ükskõik millise $n-1$ elemendist $2, \ldots, n$, siis üldse on paigutusvõimalusi $(n-1)\big(D(n-2) + D(n-1)\big)$.

Kokkuvõttes saamegi vajaliku võrduse.

Praktikumiülesanded

1. Mitu täisarvulist lahendit on võrrandil $x_1+x_2+x_3 = 25$, kus $x_1 \le 5$, $x_2 \le 10$, $x_3 \le 18$ ja x_1, x_2, $x_3 \ge 0$?

2. Mitmel viisil saab numbrid 0, 1, 2, ..., 9 järjestada nii, et järjestuses ei esineks alamjärjendeid 012, 234 ega 456?

3. Anda võrdusele

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^n = n!$$

kombinatoorne tõestus.

Lahendused

1. *Lahendus.* Defineerime omadused $P_1 =$ „$x_1 \ge 6$“, $P_2 =$ „$x_2 \ge 11$“ ja $P_3 =$ „$x_3 \ge 19$“. Leiame elimineerimisvalemis esinevad suurused.

- Kõigepealt, $W(0) = \left(\!\binom{3}{25}\!\right) = \binom{3+25-1}{25}$, sest kui muutujate ülempiire ei arvesta, siis on ülesanne samaväärne ülesandega paigutada 3 erinevasse kasti 25 ühesugust palli. Seda nägime 2. loengu näites 5.

- Leiame $W(P_1)$. Omaduse P_1 rahuldamiseks paneme kõigepealt 6 palli kasti 1 ning seejärel jaotame ülejäänud 19 palli 3 kasti vahel. Järelikult $W(P_1) = \left(\!\binom{3}{19}\!\right) = \binom{3+19-1}{19}$. Analoogiliselt $W(P_2) = \left(\!\binom{3}{14}\!\right) = \binom{3+14-1}{14}$ (paneme 11 palli kasti 2 ja ülejäänud 14 palli jaotame 3 kasti vahel) ning $W(P_3) = \left(\!\binom{3}{6}\!\right) = \binom{3+6-1}{6}$ (paneme 19 palli kasti 3 ja jaotame ülejäänud 6 palli 3 kasti vahel). Järelikult $W(1) = \binom{21}{19} + \binom{16}{14} + \binom{8}{6}$.

- Saranasel viisil leiame $W(P_1, P_2) = \left(\!\binom{3}{8}\!\right) = \binom{3+8-1}{8}$ (paneme kõigepealt 6 palli kasti 1 ja 11 palli kasti 2 ning seejärel jaotame ülejäänud 8 palli 3 kasti vahel), $W(P_1, P_3) = 1$ ning $W(P_2, P_3) = 0$. Järelikult $W(2) = \binom{10}{8} + 1$.

- Lõpuks $W(P_1, P_2, P_3) = 0$, mistõttu $W(3) = 0$.

Elimineerimisvalemi põhjal saame ülesande vastuseks

$$E(0) = W(0) - W(1) + W(2) = 351 - 358 + 46 = 39.$$

2. *Lahendus.* Toome sisse omadused $P_1 =$ „esineb 012“, $P_2 =$ „esineb 234“ ja $P_3 =$ „esineb 456“.

- Kuna üldse on 10 numbri järjestamiseks 10! võimalust, siis $W(0) = 10!$.

- Suuruse $W(1)$ leidmiseks arvutame esmalt $W(P_1)$. Arvude järjestuse, milles esineb 012, saame nii, et loeme 012 üheks numbriks ning paneme 8 „numbrit“ 012, 3, 4, …, 9 mingis järjekorras üksteise järele. Seda saab teha 8! viisil, st $W(P_1) = 8!$. Analoogiliselt $W(P_2) = W(P_3) = 8!$. Seega $W(1) = 3 \cdot 8!$.

- Arvujärjestus, mis rahuldab korraga omadusi P_1 ja P_2, peab sisaldama alamjärjendit 01234. Loeme selle alamjärjendi üheks numbriks ning koostame järjestuse 6 „numbrist“ 01234, 5, 6, 7, 8, 9. Seega $W(P_1, P_2) = 6!$. Arv, mis rahuldab korraga omadusi P_1 ja P_3, koosneb „numbritest“ 012, 3, 456, 7, 8, 9. Seega $W(P_1, P_3) = 6!$. Arv, mis rahuldab korraga omadusi P_2 ja P_3, koosneb „numbritest“ 0, 1, 23456, 7, 8, 9, mistõttu $W(P_2, P_3) = 6!$. Järelikult $W(2) = 3 \cdot 6!$.

- Lõpuks, $W(3) = W(P_1, P_2, P_3) = 4!$, sest kõiki kolme omadust rahuldav järjestus koosneb „numbritest“ 0123456, 7, 8, 9.

Seega järjestuste arv, kus ühtegi neist alamjärjendist ei esine, on

$$E(0) = W(0) - W(1) + W(2) - W(3) = 10! - 3 \cdot 8! + 3 \cdot 6! - 4!.$$

3. *Lahendus.* Vaatleme ülesannet: leida permutatsioonide arv elementidest 1, 2, …, n. Ühelt poolt on see ilmselt $n!$, mis on võrduse parem pool.

Teiselt poolt saame selle arvu leida nii, et moodustame elementidest 1, 2, …, n kõik kordumistega permutatsioonid pikkusega n ja loeme nende seas kokku sellised permutatsioonid, kus kõik elemendid on esindatud. Defineerime omadused P_i = „permutatsioonis ei esine elementi i“ $(1 \leq i \leq n)$. Otsitavate permutatsioonide arv on siis kõigi selliste kordumistega permutatsioonide arv, millel pole ühtegi omadust P_i ehk milles esinevad kõik elemendid 1, 2, …, n.

Kasutame elimineerimisvalemit. Suurus $W(0)$ on kordumistega permutatsioonide arv n elemendist n-kaupa, st $W(0) = n^n$. Suurus $W(P_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ on selliste kordumistega permutatsioonide arv, milles ei esine elementi i. Seega $W(P_i)$ on kordumistega permutatsioonide arv $n-1$ elemendist n-kaupa ehk $W(P_i) = (n-1)^n$. Järelikult $W(1) = n(n-1)^n = \binom{n}{1}(n-1)^n$. Suurus $W(P_i, P_j)$ $(1 \leq i < j \leq n)$ on kordumistega permutatsioonide arv $n-2$ elemendist n-kaupa, sest keelatud on kaks elementi, i ja j. Seega $W(P_i, P_j) = (n-2)^n$ ning $W(2) = \binom{n}{2}(n-2)^n$. Üldiselt

$$W(\underbrace{P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_r}}_{r \text{ omadust}}) = (n-r)^n$$

ning

$$W(r) = \binom{n}{r}(n-r)^n.$$

Elimineerimisvalemi põhjal

$$E(0) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i W(i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^n,$$

mis on võrduse vasak pool.

Harjutusülesanded

4. Leida 5 hulga ühendi elementide arv, kui on teada, et igas hulgas on 10000 elementi, iga kahe hulga ühisosas on 1000 elementi, iga kolme hulga ühisosas on 100 elementi, iga nelja hulga ühisosas on 10 elementi ja kõigi viie hulga ühisosas on 1 element.

5. Vaatleme järgmist täringumängu. Mängija viskab viis korda järjest kuuetahulist täringut. Mängija võidab, kui viimasel viskel tuli sama silmade arv nagu mõnel eelmisel viskel. Kui suur on selle mängu võitmise tõenäosus?

6. Kui palju leidub sürjektiivseid funktsioone $f\colon A \to B$, kui (a) $|A| = 6$ ja $|B| = 4$; (b) $|A| = m$ ja $|B| = n$?

7. Tõestada võrdus

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i} = 2n+1.$$

Juhised ja vastused. 4. 40951. 5. 0,5177… 6. Defineerida omadus: funktsioon ei omanda väärtust i. (a) 1560. (b) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$. 7. Eraldada kõigist kahendvektoritest pikkusega $2n$ välja kahendvektorid, kus kohal k on 0 ja kohal $k+1$ on 1 ($0 \le k \le 2n-1$).