Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Kevad 2019

3. Newtoni binoomvalem. Elimineerimismeetod

Newtoni binoomvalem

Näide 1. Kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
&(x+y)^1 = x+y \\
&(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \\
&(x+y)^3 = (x+y)(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{aligned}$$

Milline on $(x+y)^n$ üldavaldis? Sellele küsimusele annab vastuse järgmine teoreem.

Teoreem. *(Newtoni binoomvalem.)*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Tõestus. Kirjutame vasaku poole kujul

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n \text{ tegurit}}$$

ning loeme kokku, mitmel viisil tekib paremal sulgude avamisel liige $x^i y^{n-i}$. Sulge avades võtame igast tegurist kas x või y. Et saada see liige, tuleb

- i tegurist võtta x;
- ülejäänud teguritest võtta y.

$$(x+y)(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$

$$x^i \qquad y^{n-i}$$

Võimalusi valida need i tegurit, millest võtame x, on $\binom{n}{i}$. Seega esineb liige $x^i y^{n-i}$ lõppavaldises $\binom{n}{i}$ korda. $\square$

Praktikumis nägime, et

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Kui defineerida $\binom{n}{0} = 1$ iga $n \geq 0$ jaoks ning $\binom{n}{k} = 0$ juhul $k < 0$ või $k > n$, siis jääb see valem kehtima kõigi mittenegatiivsete ülemiste indeksite ja kõigi täisarvuliste alumiste indeksite korral. Selle valemi alusel saab binoomkordajad korraldada järgmisse tabelisse:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & \binom{1}{0} & & & & \binom{1}{1} & \\
 \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
\binom{2}{0} & & & \binom{2}{1} & & & \binom{2}{2} \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \swarrow & & \searrow & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & & & \binom{2}{1} & & & & \binom{2}{2} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\
\binom{3}{0} & & & & \binom{3}{1} & & & & \binom{3}{2} & & & & \binom{3}{3} \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & &
\end{array}$$

Kolmnurga igas reas on sama ülemise indeksiga binoomkordajad, mis on järjestatud alumise indeksi kasvamise järjekorras. Iga binoomkordaja võrdub kahe tema kohal asuva binoomkordaja summaga. Sellist binoomkordajate tabelit nimetatakse *Pascali kolmnurgaks*. Asendades binoomkordajad nende väärtustega, saame selle kirja panna ka kujul

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}$$

Iga arv võrdub kahe tema kohal asuva arvu summaga. Vastavalt Newtoni binoomvalemile annab Pascali kolmnurga rida n avaldise $(x+y)^n$ liikmete kordajad.

Newtoni binoomvalemil on mitu *tähtsat erijuhtu*. Võttes binoomvalemis $y = 1$, saame valemi

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

Võttes siin $x = 1$, saame võrduse

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n. \tag{$*$}$$

Võttes aga $x = -1$, saame võrduse

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0. \tag{$**$}$$

Võrduse ($*$) tuletasime juba 1. nädala praktikumiülesandes 5.

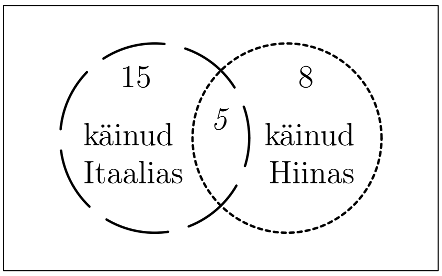
Liites kaks viimast võrdust, saame vasakule kahekordse paaris alumise indeksiga binoomkordajate summa. Lahutades aga need võrdused, saame kahekordse paaritu alumise indeksiga binoomkordajates summa. Paremale jääb mõlemal juhul 2^n. Järelikult kehtib

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.$$

Seega paaris ja paaritu alumise indeksiga binoomkordajate summad on võrdsed ning kumbki võrdub poolega Pascali kolmnurga vastava rea summast. Näiteks Pascali kolmnurga reas, kus $n = 4$, on $1 + 6 + 1 = 4 + 4$.

Elimineerimismeetod

Näide 2. Klassis on 20 õpilast. Neist 15 on käinud Itaalias, 8 Hiinas ning 5 mõlemal maal. Mitu õpilast ei ole käinud Itaalias ega Hiinas?

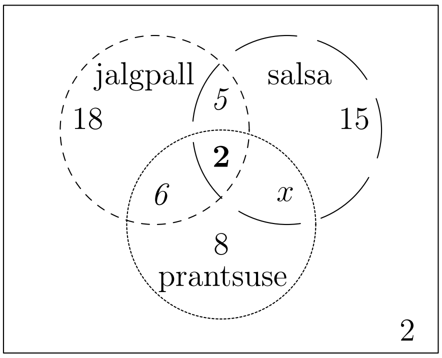


20 õpilast

Lahendus. Leiame, mitu õpilast on käinud vähemalt ühel maal. 15 õpilast on käinud Itaalias ja 8 õpilast Hiinas, see annab kokku 15+8. Kuid nii loeme neid 5 õpilast, kes on käinud mõlemal maal, kaks korda: üks kord Itaalias käinute all ja teine kord Hiinas käinute all. Seega peame sellest summast üks kord 5 lahutama. Õpilasi, kes on käinud mõlemal maal, on järelikult 15+8−5. Et kokku on õpilasi 20, siis neid, kes pole kummalgi maal käinud, on

$$\underbrace{20}_{\substack{\text{kõik}\\\text{õpilased}}} - (\underbrace{15+8-5}_{\substack{\text{käinud vähemalt}\\\text{ühel maal}}}) = \underbrace{2}_{\substack{\text{pole käinud}\\\text{kummalgi maal}}}$$

Näide 3. Klassis on 30 õpilast. Nendest 18 mängivad jalgpalli, 15 tantsivad salsat ja 8 räägivad prantsuse keelt. Lisaks, 5 õpilast mängivad jalgpalli ja tantsivad salsat, 6 õpilast mängivad jalgpalli ja räägivad prantsuse keelt ning 2 õpilast mängivad jalgpalli, tantsivad salsat ja räägivad prantsuse keelt. Mitu õpilast tantsivad salsat ja räägivad prantsuse keelt, kui 2 õpilast ei tee ühtegi neist kolmest tegevusest?



30 õpilast

Lahendus. Olgu x küsitav õpilaste arv. Arvutame, mitu õpilast ei tee ühtegi tegevust. Kokku on õpilasi 30. Lahutame neist maha õpilased, kes teevad vähemalt ühte tegevust: $30-(18+15+8)$. Nüüd oleme eemaldanud õpilased, kes teevadki täpselt ühte tegevust, kuid õpilased, kes teevad täpselt kahte tegevust, oleme maha lahutanud kaks korda. Paneme tagasi õpilased, kes teevad vähemalt kahte tegevust: $30-(18+15+8)+(6+5+x)$. Nüüd oleme kokkuvõttes eemaldanud õpilased, kes teevad täpselt kahte tegevust, kuid õpilased, kes teevad kõiki kolme tegevust, oleme üldse maha lahutanud kolm korda ja juurde lisanud samuti kolm korda ehk need on ikka alles. Lahutame need üks kord maha: $30-(18+15+8)+(6+5+x)-2$. Järele jäävad õpilased, kes ei tee ühtegi tegevust. Vastavalt ülesande tingimustele on neid 2. Seega $30-(18+15+8)+(6+5+x)-2=2$, millest $x=4$.

Elimineerimisprintsiip. *Olgu meil n elementi, millest igaühel võivad olla mõned omadused omaduste P_1, P_2, ..., P_t hulgast. Tähistame*

$W(P_i)$	*elementide arv, millel on omadus P_i, $1 \le i \le t$*
$W(P_i, P_j)$	*elementide arv, millel on omadused P_i ja P_j, $1 \le i, j \le t$*
. . . . .	. . . .
$W(P_1, P_2, \ldots, P_t)$	*elementide arv, millel on omadused P_1, P_2, ..., P_t*
$E(0)$	*elementide arv, millel pole ühtegi neist omadustest.*

Siis

$$\begin{aligned}E(0) = n &- \big(W(P_1) + W(P_2) + \ldots + W(P_t)\big) + \\ &+ \big(W(P_1, P_2) + W(P_1, P_3) + \ldots + W(P_{t-1}, P_t)\big) - \\ &- \big(W(P_1, P_2, P_3) + W(P_1, P_2, P_4) + \ldots + W(P_{t-2}, P_{t-1}, P_t)\big) + \\ &+ \ldots + (-1)^t W(P_1, P_2, \ldots, P_t).\end{aligned}$$

Tõestus. Vaatleme suvalist elementi x. Eeldame, et x-l on täpselt $j \ge 1$ omadust. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et need omadused on P_1, P_2, ..., P_j.

Elemendi x panus võrduse vasakusse poolde on 0. Leiame, milline on elemendi x panus võrduse paremasse poolde. Liige $W(P_{i_1}, \ldots, P_{i_k})$ võtab elementi x arvesse parajasti siis, kui hulk $\{P_1, P_2, \ldots, P_j\}$ sisaldab kõiki omadusi P_{i_1}, ..., P_{i_k}. Kuna võimalusi j omaduse hulgast k omadust välja valida on $\binom{j}{k}$, siis see on ka liikmete arv, kuhu x panuse annab. Seejuures kõigi nende liikmete märk on $(-1)^k$. Eelnev arutlus kehtib iga $k = 1, 2, \ldots, j$ korral. Seega saame, et x annab tõestatava võrduse paremasse poolde panuse

$$1 - j + \binom{j}{2} - \binom{j}{3} + \ldots + (-1)^j \binom{j}{j}.$$

Võrduse (∗∗) põhjal on selle avaldise väärtus 0.

See kehtib iga x puhul, millel on $j \ge 1$ omadust. Kui elemendil x on 0 omadust, siis annab ta nii vasakusse kui ka paremasse poolde panuse 1. Järelikult on iga x panus võrduse vasakusse ja paremasse poolde sama. Sellega ongi võrdus tõestatud. □

Elimineerimisvalemi avaldises esinevaid summasid tähistame ka lühemalt:

$$\begin{aligned}W(0) &= n \\ W(1) &= W(P_1) + W(P_2) + \ldots + W(P_t) \\ W(2) &= W(P_1, P_2) + W(P_1, P_3) + \ldots + W(P_{t-1}, P_t) \\ W(3) &= W(P_1, P_2, P_3) + W(P_1, P_2, P_4) + \ldots + W(P_{t-2}, P_{t-1}, P_t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W(t) &= W(P_1, P_2, \ldots, P_t).\end{aligned}$$

Praktikumiülesanded

1. Tõestada, et
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. Tõestada, et
$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

3. Tõestada, et
$$\sum_{i=0}^{n} (i-2)\binom{n}{i} = 2^{n-1}(n-4).$$

4. Klassis on 18 õpilast. 12 neist räägivad prantsuse keelt, 7 itaalia keelt ja 5 jaapani keelt. 5 räägivad nii itaalia kui ka prantsuse keelt. 2 räägivad nii itaalia kui ka jaapani keelt. 1 räägib nii prantsuse kui ka jaapani keelt. 1 õpilane räägib kõiki kolme keelt. Mitu õpilast ei räägi ühtki neist kolmest keelest?

5. Mitu arvu 1-st 100-ni ei jagu 2-ga, 3-ga ega 7-ga?

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Et $\binom{n}{i}^2 = \binom{n}{i}\binom{n}{i} = \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$, siis on tõestatav võrdus samaväärne võrdusega
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Vaatleme järgmist ülesannet: meil on n valget palli numbritega 1, …, n ja n musta palli numbritega 1, …, n. Mitmel viisil saab nende hulgast valida n palli?

Loendame valikuvõimalusi kahte moodi. (a) Valime lihtsalt $2n$ erineva palli hulgast n palli: võimalusi selleks on
$$\binom{2n}{n}.$$

(b) Jaotame valikuvõimalused klassidesse sõltuvalt sellest, mitu valget palli valikusse kuulub. Olgu i valitavate valgete pallide arv, $0 \le i \le n$. Võimalusi valida n erineva valge palli hulgast i valget palli on $\binom{n}{i}$. Võimalusi valida n erineva musta palli hulgast $n-i$ musta palli neile lisaks on $\binom{n}{n-i}$. Korrutamisreegli põhjal saame i valget ja $n-i$ musta palli valida $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ viisil.

Kuna iga valgete pallide arv i, kus $0 \leq i \leq n$, on võimalik, siis liitmisreegli põhjal on pallide valimiseks võimalusi kokku

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}.$$

Kuna juhtudel (a) ja (b) loendame samu võimalusi, siis kehtib võrdus.

Lahendus 2. Vaatleme samasust

$$(x+y)^{2n} = (x+y)^n (x+y)^n.$$

Uurime liikme $x^n y^n$ kordajat. Vasakul on see binoomvalemi põhjal $\binom{2n}{n}$. Paremal saame liikme $x^n y^n$ siis, kui korrutame esimese sulu liikme $x^i y^{n-i}$ teise sulu liikmega $x^{n-i} y^i$, kus i võib olla ükskõik milline arv 0-st n-ni. Esimese sulu liikme $x^i y^{n-i}$ kordaja on binoomvalemi põhjal $\binom{n}{i}$ ning teise sulu liikme $x^{n-i} y^i$ kordaja $\binom{n}{n-i}$. Kokku saame liikme $x^n y^n$ kordajaks $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$. Et tegemist on samasusega, siis on liikme kordajad vasakul ja paremal samad.

2. *Lahendus.* Binoomteoreemist

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

See võrdus kehtib iga $x \in \mathbb{R}$ puhul. Leiame võrduse mõlemast poolest tuletise:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} x^{i-1}.$$

(Indeksid algavad 1-st, sest indeksile $i = 0$ vastav liige muutub nulliks.) Valime $x = 1$:

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i}.$$

3. *Lahendus.* Binoomvalemi põhjal

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Eelmisest ülesandest

$$\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

Lahutame viimasest võrdusest kahekordse eelviimase. Vasakul saame

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} - 2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{n} 2\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}(i-2)\binom{n}{i}$$

(teise valemi esimeses summas muutsime summeerimisindeksi algväärtuse 1-st 0-ks) ning paremal

$$n \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^n = 2^{n-1}(n-4).$$

4. *Lahendus.* Kasutame elimineerimisvalemit. Meil on kolm omadust: P_1 = räägib prantsuse keelt, P_2 = räägib itaalia keelt, P_3 = räägib jaapani keelt. Arvutame välja elimineerimisvalemis esinevad summad:

- $W(0) = 18$
- $W(1) = W(P_1) + W(P_2) + W(P_3) = 12 + 7 + 5 = 24$
- $W(2) = W(P_1, P_2) + W(P_1, P_3) + W(P_2, P_3) = 5 + 1 + 2 = 8$
- $W(3) = 1$

Järelikult

$$E(0) = W(0) - W(1) + W(2) - W(3) = 18 - 24 + 8 - 1 = 1.$$

5. *Lahendus.* Defineerime omadused: P_1 = arv jagub 2-ga, P_2 = arv jagub 3-ga, P_3 = arv jagub 7-ga. Leiame summad.

- $W(0) = 100$.
- Vaadeldavate arvude hulgas on 2-ga jaguvaid arve 50 (arvud 2, 4, ..., 100), seega $W(P_1) = 50$. Analoogiliselt, 3-ga jaguvaid arve on 33 (arvud 3, 6, ..., 99) ning 7-ga jaguvaid arve 14 (arvud 7, 14, ..., 98). Seega $W(P_2) = 33$ ja $W(P_3) = 14$. Järelikult $W(1) = W(P_1) + W(P_2) + W(P_3) = 97$.
- Arvud, millel on mõlemad omadused P_1 ja P_2, on parajasti arvud, mis jaguvad 6-ga. Neid arve on vaadeldavate hulgas $\lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16$, st $W(P_1, P_2) = 16$. Analoogiliselt, omadused P_1 ja P_3 on korraga parajasti nendel arvudel, mis jaguvad 14-ga, ja omadused P_2 ja P_3 korraga arvudel, mis jaguvad 21-ga. Siit saame $W(P_1, P_3) = 7$ ja $W(P_2, P_3) = 4$. Seega $W(2) = W(P_1, P_2) + W(P_1, P_3) + W(P_2, P_3) = 27$.

- Kõik kolm omadust on 42-ga jaguvatel arvudel, neid arve on $W(3) = W(P_1, P_2, P_3) = 2$.

Elimineerimisvalemist saame nüüd otsitavaks arvude arvuks

$$E(0) = W(0) - W(1) + W(2) - W(3) = 100 - 97 + 27 - 2 = 28.$$

Harjutusülesanded

6. Antud on ruudustik mõõtmetega $n \times n$. Ruudustiku alumises vasakus nurgas asub 2^n nuppu. Esimese käiguga liiguvad pooled neist üles ja pooled paremale. Teise käiguga liiguvad kummaski sõlmpunktis olevatest nuppudest korraga pooled üles ja pooled paremale. Selliseid käike tehakse kokku n. Kus asuvad nupud n käigu pärast ja mitu nuppu asub ruudustiku igas sõlmpunktis?

7. Kasutades avaldise $(1 + x)^n$ ja selle tuletise arendist, tõestada võrdus

$$\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i}^2 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}.$$

8. Tõestada võrdus

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

9. Mitmel viisil saab tähti A, B, ..., H järjestada nii, et saadavas sõnas ei esine tähekombinatsioone AB, CD, EF ega GH?

10. Kuus inimest saabub külla ja igaüks riputab esikus nagisse oma mütsi. Kui hiljem kõik valmistuvad lahkuma, kustub esikus tuli ja igaüks võtab pimeduses nagist ühe mütsi. Mitmel viisil võivad külalised mütse võtta, et keegi ei saaks enda oma?

Juhised ja vastused. 6. Pascali kolmnurk. 7. Leida selle avaldise ja tema tuletise korrutises sobiva liikme kordaja. 8. Vaadelda elementidest 1, 2, ..., $2n + 1$ suurima numbriga elementi, mis valikusse kuulub. 9. 24024. 10. 265.