Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Kevad 2019

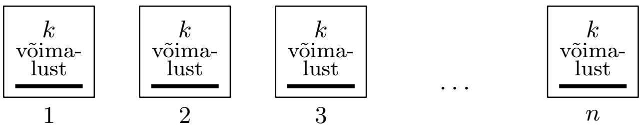
2. Kordumistega permutatsioonid ja kombinatsioonid

Kordumistega permutatsioonid

Definitsioon. *Kordumistega permutatsiooniks nimetatakse antud hulga elementidest moodustatud järjestust, kus elemendid võivad korduda.*

Kuna järjestuse erinevatel positsioonidel võib asuda sama element, siis kordumistega permutatsioon üldiselt ei ole tavaline permutatsioon.

Kordumistega permutatsioonide arvu, kui hulga elementide arv on k ja moodustame järjestusi pikkusega n, saame leida juba tuntud võttega. Vaatleme n positsiooni:



Esimesele positsioonile võime elemendi valida k viisil, teisele positsioonile samuti k viisil jne. Korrutamisreegli põhjal saame kõik positsioonid elementidega täita

$$k \cdot k \cdot \ldots \cdot k = k^n$$

viisil, mis ongi otsitav järjestatud paigutuste arv.

Sama ideed rakendasime eelmise loengu näites 4, kus leidsime, et tähtedest A–Z saab 5-tähelisi sõnu moodustada 26^5 tükki, samuti eelmise loengu näidetes 3 ja 5.

Multihulga permutatsioonid

Multihulgaks nimetame hulka, milles elemendid võivad korduda (see tähendab, esineda mitmes eksemplaris). Järgnevalt uurime multihulga kõigi elementide ümberjärjestusi.

Näide 1. Mitu erinevat sõna saab koostada tähtedest M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I?

Lahendus. Loeme tähed kokku:

Täht	Arv
M	1
I	4
S	4
P	2
Kokku	11

Kirjutame välja kõikvõimalikud permutatsioonid eeldusel, et kõik tähed on erinevad. Nii saame 11! sõna. Kuid osad sõnad on tegelikult samad, näiteks permutatsioonid

$$
\begin{gathered}
\mathrm{M}\ \underline{\underline{\mathrm{I}_1}}\ \mathrm{S}_1\ \mathrm{S}_2\ \underline{\underline{\mathrm{I}_2}}\ \mathrm{S}_3\ \mathrm{S}_4\ \underline{\underline{\mathrm{I}_3}}\ \mathrm{P}_1\ \mathrm{P}_2\ \underline{\underline{\mathrm{I}_4}} \\
\mathrm{M}\ \underline{\underline{\mathrm{I}_2}}\ \mathrm{S}_1\ \mathrm{S}_2\ \underline{\underline{\mathrm{I}_1}}\ \mathrm{S}_3\ \mathrm{S}_4\ \underline{\underline{\mathrm{I}_3}}\ \mathrm{P}_1\ \mathrm{P}_2\ \underline{\underline{\mathrm{I}_4}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{M}\ \underline{\underline{\mathrm{I}_4}}\ \mathrm{S}_1\ \mathrm{S}_2\ \underline{\underline{\mathrm{I}_3}}\ \mathrm{S}_3\ \mathrm{S}_4\ \underline{\underline{\mathrm{I}_2}}\ \mathrm{P}_1\ \mathrm{P}_2\ \underline{\underline{\mathrm{I}_1}}
\end{gathered}
$$

annavad kõik sama sõna. Leiame, mitu korda me niimoodi ühte ja sama sõna kirjutame.

- Tähti I saab omavahel ümber paigutada 4! viisil.
- Tähti S saab omavahel ümber paigutada 4! viisil.
- Tähti P saab omavahel ümber paigutada 2! viisil.

Seega kirjutame sama sõna 4! 4! 2! korda. Järelikult

$$\text{sõnade arv} \cdot 4!\,4!\,2! = 11!,$$

millest

$$\text{sõnade arv} = \frac{11!}{4!\,4!\,2!}.$$

Üldiselt, kui meil on k_1 esimest tüüpi objekti, k_2 teist tüüpi objekti, ..., k_t t-ndat tüüpi objekti, kus $k_1+k_2+\ldots+k_t = n$, siis võimaluste arv järjestada neid objekte ühte ritta on

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_t!}.$$

Näide 2. Klassis on n õpilast. Mitmel viisil saab nad jaotada jalg-, korv- ja võrkpallivõistkonnaks suurustega vastavalt k_1, k_2 ja k_3 õpilast, kus $k_1 + k_2 + k_3 \leq n$?

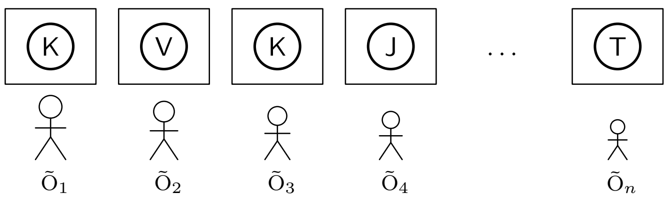
Lahendus 1. Valime järjest esimese, teise ja kolmanda võistkonna koosseisu.

- Kõigepealt valime k_1 õpilast jalgpallivõistkonna jaoks, selleks on $\binom{n}{k_1}$ võimalust.
- Seejärel valime ülejäänute seast k_2 õpilast korvpallivõistkonna jaoks, selleks on $\binom{n-k_1}{k_2}$ võimalust.
- Lõpuks valime allesjäänute hulgast k_3 õpilast võrkpallivõistkonna jaoks, selleks on $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ võimalust.

Korrutamisreegli põhjal saame, et kolme võistkonna valimiseks on võimalusi

$$\begin{aligned}\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} &= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)!}\\ &= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)!}.\end{aligned}$$

Lahendus 2. Paigutame õpilased ühte ritta (näiteks pikkuse järgi). Võtame k_1 jalgpalli, k_2 korvpalli ja k_3 võrkpalli palli ning $n - k_1 - k_2 - k_3$ tennisepalli ja paneme need ritta õpilaste ette:



Need õpilased, kes saavad jalgpalli palli, moodustavad jalgpallivõistkonna, sama korv- ja võrkpalliga. Õpilased, kes saavad tennisepalli, ei kuulu ühtegi võistkonda. Palle saab õpilaste ette paigutada

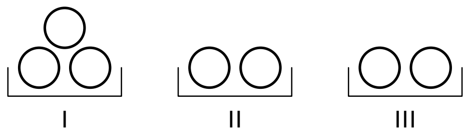
$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)!}$$

viisil, sest tegemist on multihulga permutatsioonidega.

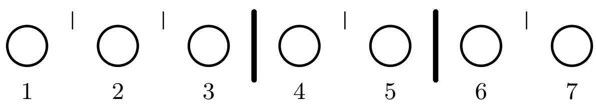
Kordumistega kombinatsioonid

Näide 3. Meil on n kasti, mis on nummerdatud arvudega 1, 2, $\ldots$, n, ning k ühesugust palli. Mitmel viisil saab jaotada pallid kastidesse?

Näiteks kui $n = 3$ ja $k = 7$, siis üks võimalus palle kastidesse jaotada on:



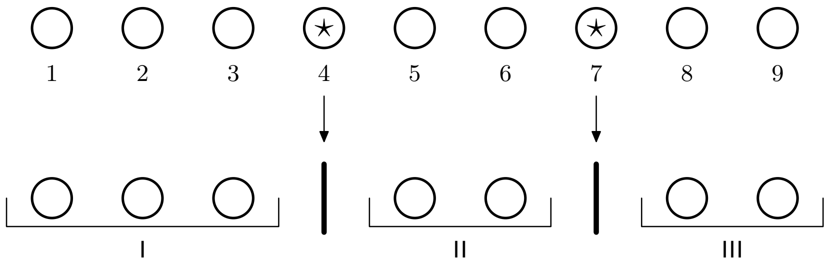
Lahendus (Vale!). Paneme pallid ühte ritta. Pallide vahele jääb $k - 1$ vahekohta. Valime nendest välja $n - 1$ kohta ja paigutame sinna vaheseinad:



Rea alguse pallid kuni esimese vaheseinani paneme esimesse kasti, pallid esimest vaheseinast teiseni paneme teise kasti jne kuni pallid viimasest vaheseinast rea lõpuni viimasesse, n-ndasse kasti. Vaheseintele kohtade valimiseks ja seega pallide jaotamiseks kastide vahel on $\binom{k-1}{n-1}$ võimalust.

See lahendus on aga vale, sest ei arvesta võimalusega, et kastid võivad olla tühjad. Tühja kasti peaks esitama kaks samas kohas asuvat vaheseina, kuid seda võimalust me siin ette ei näe.

Lahendus (Õige). Võtame $n+k-1$ palli ja paigutame nad ühte ritta. Seejärel valime mingid $n - 1$ palli ja asendame need vaheseintega:



Kastidesse jaotame pallid samamoodi nagu enne. Kui kaks vaheseina satuvad kõrvuti, siis jääb vastav kast tühjaks. Seega tegelikult on võimalusi pallide jaotamiseks kastide vahel

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Viimast arvu tähistatakse ka sümboliga CC_n^k või $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Näide 4. Olgu meil n erinevat tüüpi elemente. Kui palju saab nendest moodustada k-elemendilisi kombinatsioone, milles sama element võib esineda mitu korda?

Näiteks tähtedest A, B, C, D saab moodustada järgmised kaheelemendilised kombinatsioonid (siin $n = 4$, $k = 2$):

$$\begin{array}{ccccc} \{A, A\} & \{A, B\} & \{A, C\} & \{A, D\} & \{B, B\} \\ \{B, C\} & \{B, D\} & \{C, C\} & \{C, D\} & \{D, D\} \end{array}$$

Tähtede järjekord kombinatsiooni sees ei ole oluline.

Lahendus. Vaatleme n erinevat kasti ja k ühesugust palli. Kastid vastavad elemenditüüpidele ja pallid kohtadele kombinatsioonis. Jaotame pallid kastidesse. Jaotamise tulemusele vastab kombinatsioon, kus iga elemenditüüp esineb nii mitu korda, kui mitu palli vastavasse kasti sattus. Pallide jaotamisvõimaluste arv on eelmise näite põhjal $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. See on niisiis ka otsitav kombinatsioonide arv.

Näide 5. Kui palju leidub võrrandil

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

täisarvulisi lahendeid, kus $x_i \geq 0$ iga $i = 1, 2, \ldots, n$ puhul?

Lahendus. Oletame, et iga x_i on „kast“. Meil on k ühesugust palli. Jaotame pallid kastidesse nagu näites 3. Seejärel loeme iga x_i väärtuseks i-ndas kastis olevate pallide arvu. Nii saame võrrandi lahendi, mis rahuldab antud tingimusi. Seega lahendite arv on $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

Näidete 3, 4, 5 vastused on samad. Need näited esitavad kolme sisuliselt samaväärset ülesannet, mis erinevad ainult väliskuju poolest.

Kokkuvõte

Kahe viimase loengu põhjal võime permutatsioonide ja kombinatsioonide arvude kohta teha järgmise kokkuvõtliku tabeli.

	kordumisteta	kordumistega
permutatsioonid	$n!$	k^n
k-permutatsioonid / multihulga permutatsioonid	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_t!}$
kombinatsioonid	$\binom{n}{k}$	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Praktikumiülesanded

1. Kui palju leidub 8-kohalisi telefoninumbreid, mis algavad numbriga 5 ja koosnevad numbritest 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7?

2. Mitu erinevat sõna saab koostada tähtedest M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I, kui vahetult M järel peab alati olema I ja kaks P-tähte peavad alati olema kõrvuti?

3. Kuhjas on punased, sinised, rohelised ja kollased pallid. Sama värvi pallid on identsed. Mitmel viisil saab valida 12 palli nii, et valitakse vähemalt 7 rohelist palli?

4. Mitmel viisil saab eelmise ülesande olukorras valida 12 palli nii, et valitakse *ülimalt* 7 rohelist palli?

5. Vaatleme võrrandit $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, kus x_1, x_2, …, x_n ja k on kõik täisarvud. Kui palju leidub sellel võrrandil lahendeid, kus iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $x_i \in \{0, 1\}$?

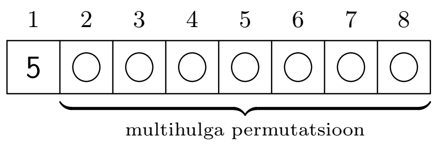
6. Kui palju lahendeid leidub eelmise ülesande võrrandil, kui iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $x_i \geq 0$?

7. Kui palju lahendeid leidub ülesande 5 võrrandil, kui iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $x_i \geq 1$?

8. Riigi parlamendivalimistel kandideerib 3 erakonda. Nende 3 erakonna vahel jaotatakse valimistel $2n + 1$ kohta. Mitmel viisil saavad kohad jaguneda nii, et igal kahel erakonnal oleks koos võetuna parlamendis enamus?

Lahendused

1. *Lahendus.* Meil on vaja täita numbritega 8 kohta. Üks number 5 läheb esimesele kohale, ülejäänud 7 numbrit võib panna ülejäänud 7 kohale ükskõik millises järjekorras.



Esimesele numbrile järgnev osa on multihulga permutatsioon, kus multihulga moodustavad üks number 5, kolm numbrit 6 ja kolm numbrit 7. Vastavalt valemile on selliste permutatsioonide arv

$$\frac{7!}{1!\,3!\,3!} = 140.$$

2. *Lahendus.* Loeme tähekombinatsiooni MI üheks täheks ja tähekombinatsiooni PP samuti üheks täheks. Seega koostame sõnu järgmistest „tähtedest“: MI (1 täht), S (4 tähte), I (3 tähte), PP (1 täht), kokku 9 tähte. Multihulga permutatsioonide arvu valemi põhjal on selliste sõnade arv $\frac{9!}{4!\,3!}$ (valemis ignoreerime tegureid $1! = 1$).

3. *Lahendus.* Kõigepealt valime ära 7 rohelist palli. Neile lisaks tuleb valida 4 tüüpi pallide hulgast 5 palli. Näite 4 põhjal saab seda teha

$$\left(\!\!\binom{4}{5}\!\!\right) = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5}$$

viisil.

4. *Lahendus.* Võimalusi valida 4 tüüpi pallide hulgast 12 palli ilma piiranguteta on kordumistega kombinatsioonide valemi põhjal

$$\left(\!\!\binom{4}{12}\!\!\right) = \binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12}.$$

Need võimalused jagunevad kaheks: a) valikud, kuhu kuulub ülimalt 7 rohelist palli ja b) valikud, kuhu kuulub vähemalt 8 rohelist palli. Teist liiki valikud saame kokku lugeda samamoodi nagu eelmises ülesandes: võtame 8 rohelist palli ning valime neile juurde 4 tüüpi pallide hulgast 4 palli. Seda saab teha

$$\left(\!\!\binom{4}{4}\!\!\right) = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4}$$

viisil. Seega otsitavaid valikuvõimalusi on

$$\binom{15}{12} - \binom{7}{4}.$$

5. *Lahendus.* Valime muutujatest $x_1, x_2, \ldots, x_n$ välja need muutujad, mille väärtuseks saab 1; ülejäänud muutujate väärtuseks saab siis 0. Selleks, et muutujate väärtuste summa tuleks k, peame valima k muutujat. Seda saab teha $\binom{n}{k}$ viisil.

6. *Lahendus.* See on sama nagu näide 5, seega lahendite arv on $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

7. *Lahendus.* Meil on vaja n muutuja vahel ära jagada k ühte. Kõigepealt anname igale muutujale ühe ühe, millega saab garanteeritud, et iga muutuja väärtus on vähemalt 1. Seejärel tuleb muutujate vahel ära jagada ülejäänud $k-n$ ühte. See on sama nagu näide 5, kus võrrandi parema poole väärtuseks on $k-n$. Selle võrrandi lahendite arv on

$$\left(\!\!\binom{n}{k-n}\!\!\right) = \binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}.$$

Seda ülesannet saab lahendada ka nii nagu näites 3 valeks märgitud lahenduses, sest tingimus, et iga muutuja väärtus on vähemalt 1, vastab täpselt selles lahenduses tehtud varjatud eeldusele.

8. *Lahendus.* Vastand olukorrale, kus igal kahel erakonnal koos võetuna on enamus, on olukord, kus leidub erakond, kellel on üksinda enamus. See tähendab, leidub erakond, kellel on vähemalt $n+1$ kohta.

Üldse on võimalusi $2n+1$ koha jagunemiseks 3 erakonna vahel samapalju kui võimalusi paigutada 3 erinevasse kasti $2n+1$ ühesugust palli ehk

$$\left(\!\!\binom{3}{2n+1}\!\!\right) = \binom{3+(2n+1)-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1}.$$

Kõigist võimalustest jätame välja need, kus ühel erakonnal on vähemalt $n+1$ kohta. Valime selle erakonna välja, selleks on 3 võimalust. Seejärel anname talle $n+1$ kohta ning jaotame ülejäänud n kohta ära 3 erakonna vahel, milleks on $\left(\!\binom{3}{n}\!\right)$ võimalust. Kokku on kohtade jaotusi, kus ühel erakonnal on absoluutne enamus,

$$3\left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) = 3\binom{3+n-1}{n} = 3\binom{n+2}{n}.$$

Ülesandes küsitud jagunemisviiside arv on seega

$$\binom{2n+3}{2n+1} - 3\binom{n+2}{n}.$$

Harjutusülesanded

9. Mitmel viisil saab viiest tähest A, B, C, D, E moodustada 5-tähelise sõna, kus ükski täht ei esine rohkem kui kaks korda?

10. Mitmel viisil saab sõnas MATEMAATIKA tähti ümber paigutada nii, et kaks A-tähte poleks kuskil kõrvuti?

11. Mitmel viisil saab 10 ühesugust paberilehte jaotada 4 erinevale lauale, mis paigutatakse ära 3 erinevasse klassiruumi?

12. Mitu võimalust on paigutada 4 punast palli ja 6 sinist palli viide erinevasse kasti?

13. Mitmel erineval viisil on võimalik valida 5 sinise, 10 valge ja 15 punase palli seast 10 palli (sama värvi pallid on ühesugused)?

Vastused ülesannete järjekorras: 2220, 88200, 23166, 14700, 51.