Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Kevad 2019

1. Permutatsioonid ja kombinatsioonid

Kombinatoorika põhireeglid

Kombinatoorikaülesannete lahendamine tugineb suures osas kahele reeglile, mida saab rakendada väga mitmekesistes olukordades ja mida võib seetõttu nimetada kombinatoorika põhireegliteks. Need on liitmisreegel ja korrutamisreegel.

Liitmisreegel. *Kui ühte tegevust saab sooritada n_a viisil ja teist tegevust n_b viisil, siis kas ühte või teist tegevust saab sooritada $n_a + n_b$ viisil.*

Näide 1. Oletame, et meil on võimalik teha kahte järgmist tegevust:

- viskame täringut – 6 võimalikku tulemust (1, 2, 3, 4, 5, 6);
- viskame münti – 2 võimalikku tulemust (kull, kiri).

Kui viskame mingit neist kahest esemest, siis üldse on meil võimalik saada $6 + 2$ erinevat tulemust.

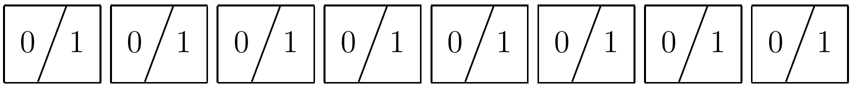
Korrutamisreegel. *Kui ühte tegevust saab sooritada n_a viisil ja teist tegevust n_b viisil, siis nii ühte kui ka teist tegevust saab sooritada $n_a \cdot n_b$ viisil.*

Näide 2. Kui viskame kõigepealt täringut ja seejärel münti, siis üldse on võimalik saada $6 \cdot 2 = 12$ erinevat tulemust:

$$\begin{array}{ll}
(1, \text{kull}) & (1, \text{kiri}) \\
(2, \text{kull}) & (2, \text{kiri}) \\
(3, \text{kull}) & (3, \text{kiri}) \\
(4, \text{kull}) & (4, \text{kiri}) \\
(5, \text{kull}) & (5, \text{kiri}) \\
(6, \text{kull}) & (6, \text{kiri})
\end{array}$$

Näide 3. Kui palju sümboleid saab esitada 8-bitiliste kahendvektoritega?

Lahendus. Ühe sümboli esitamiseks peame 8 positsioonist igaühele valima kas väärtuse 0 või väärtuse 1:

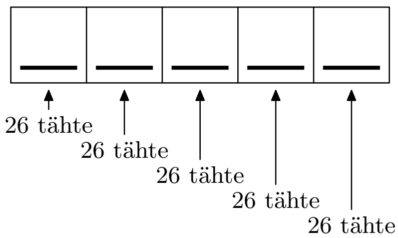


Esimesele positsioonile väärtuse valimiseks (esimene tegevus) on 2 võimalust, teisele positsioonile väärtuse valimiseks (teine tegevus) samuti 2 võimalust jne kuni kaheksandale positsioonile väärtuse valimiseks (kaheksas tegevus) 2 võimalust. Kõigi tegevuste tegemiseks on võimalusi ja seega ka erinevaid kahendvektoreid

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{8 tegurit}} = 2^8 = 256.$$

Näide 4. Kui palju saab tähtedest A–Z moodustada sõnu pikkusega 5?

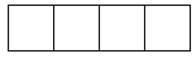
Lahendus. Tähti A–Z on 26 tükki. Sõna määramiseks tuleb meil järjest teha 5 valikut:



Näiteks valides esimesse ruutu tähe A, teise tähe Y, kolmandasse tähe I, neljandasse tähe O ja viiendasse tähe I, saame sõna AYIOI. Kuna igal sammul saame tähe valida 26 viisil, siis kokku on sõnu

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11\ 881\ 376.$$

Näide 5. Kui palju saab moodustada 4-numbrilisi PIN-koode, mis ei sisalda numbrit 8?

Lahendus. Vaja on järjest täita 4 positsiooni:  . Iga positsiooni saame täita 9 viisil (numbrid 0–7 või 9). Seega saab moodustada $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4 = 6561$ erinevat PIN-koodi.

Näide 6. Mitmel viisil saab 5 prantslase, 7 sakslase ja 3 ameeriklase seast valida kaks erinevast rahvusest inimest?

Lahendus. Kaks erinevast rahvusest inimest saab valida järgmistel viisidel:

- prantslane + sakslane: võimalusi $5 \cdot 7$
- sakslane + ameeriklane: võimalusi $7 \cdot 3$
- prantslane + ameeriklane: võimalusi $5 \cdot 3$

Siin kasutasime kolm korda korrutamisreeglit. Edasi kasutame liitmisreeglit ja saame, et kokku kahe erinevast rahvusest inimese valimiseks

$$5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 35 + 21 + 15 = 71$$

võimalust.

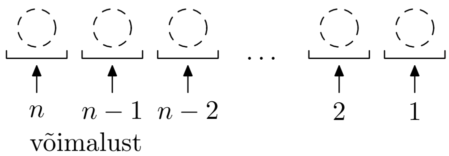
Permutatsioonid

Näide 7. *Permutatsioonid n elemendist.* Olgu meil n palli, mis on nummerdatud numbritega 1 kuni n. Mitmel viisil saab need pallid järjestada ühte ritta?

Näiteks kui $n = 5$, siis üks võimalik pallide järjestus on selline:

2 5 3 1 4

Lahendus. Kujutame ette n järjestikust positsiooni, kuhu hakkame paigutama palle:



Esimesele positsioonile saame palli valida n palli hulgast. Pärast esimese palli ärapanemist saame teisele positsioonile palli valida $n - 1$ palli hulgast, mis selleks hetkeks on järele jäänud. Edasi, kolmandale positsioonile saame palli valida $n - 2$ palli hulgast jne kuni lõpuks viimase positsiooni jaoks jääb järele üksainus pall. Seega saab niisugust pallide rida koostada

$$P(n) = n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

erineval viisil.

n erineva objekti ümberjärjestust nimetatakse *permutatsiooniks n elemendist* ja tähistatakse sümboliga $P(n)$. Vastavalt ülalsaadud valemile avaldub permutatsioonide arv järjestikuste täisarvude 1, ..., n korrutisena. Sellist korrutist nimetatakse *arvu n faktoriaaliks* ja tähistatakse sümboliga $n!$. Seega võib kirjutada ka

$$P(n) = n!.$$

Üldiselt vaatleme mitte tingimata terve n-elemendilise hulga, vaid selle teatava alamhulga ümberjärjestusi.

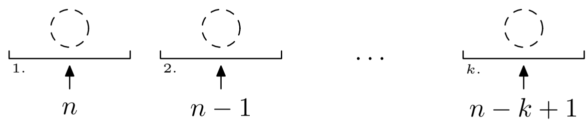
Definitsioon. *Permutatsiooniks n elemendist k-kaupa ehk k-permutatsiooniks nimetatakse n-elemendilise hulga k-elemendilist järjestatud alamhulka.*

Permutatsioonide arvu märgitakse sümboliga P_n^k või ka $P(n, k)$.

Tuletame valemi k-permutatsioonide arvu leidmiseks. Olgu meil n elementi

$$1 \quad 2 \quad \cdots \quad n$$

ja k positsiooni



Valime elemendi esimesele positsioonile, selleks on n võimalust. Seejärel valime ülejäänud elementide seast elemendi teisele positsioonile, selleks on $n-1$ võimalust. Jätkame samamoodi, kuni lõpuks valime järelejäänud elementidest elemendi viimasele, k-ndale positsioonile, selleks on $n-k+1$ võimalust. Seega

$$P_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Korrutades ja jagades viimast avaldist suurusega $(n-k)(n-k-1)\dots\cdot 2\cdot 1$, tekivad lugejasse ja nimetajasse täisfaktoriaalid ning selle valemi saame kirja panna ka kujul

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Näide 8. Kui meil on 3 elementi ja moodustame nendest järjestatud 2-elemendilisi alamhulki (2-permutatsioone), siis $n = 3$ ja $k = 2$. Valemist saame selliste permutatsioonide arvuks $P_3^2 = 6$. Kõik need permutatsioonid on:

1 2	2 3
1 3	3 1
2 1	3 2

Kombinatsioonid

Definitsioon. *Kombinatsiooniks n elemendist k-kaupa ehk k-kombinatsiooniks nimetatakse n-elemendilise hulga k-elemendilist järjestamata alamhulka.*

Kombinatsioonide arvu märgitakse sümboliga C_n^k või $C(n,k)$ või $\binom{n}{k}$.

Näide 9. Olgu meil 3 elementi. Neist saab moodustada järgmised 2-kombinatsioonid:

$$\{1, 2\} \qquad \{1, 3\} \qquad \{2, 3\}$$

Seega $C_3^2 = 3$.

Kombinatsioonide puhul on oluline ainult alamhulga koosseis, aga mitte järjestus. Seetõttu on 12 ja 21 samad kombinatsioonid. Seevastu permutatsioonide puhul on oluline nii koosseis kui ka järjestus.

Tuletame valemi kombinatsioonide arvu leidmiseks. Olgu antud n elementi. Vaatleme alguses k-elemendilisi alamhulki, kus järjestus on oluline. Antud n elemendist saab k-elemendilist järjestatud alamhulka valida kahe strateegia järgi.

1. Valida järjestatud alamhulk. Selleks on P_n^k võimalust.

2. Või valida järjestamata alamhulk ja järjestada see. Järjestamata k-elemendilise alamhulga valimiseks on C_n^k võimalust. Valitud alamhulga järjestamiseks on seejärel $P(k)$ võimalust. Seega korrutamisreegli põhjal saame järjestatud k-elemendilist alamhulka valida $C_n^k P(k)$ viisil.

Järelikult $P_n^k = C_n^k P(k)$. Siit

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Praktikumiülesanded

1. Mitmel viisil saab paigutada 10 tudengit ühte ritta?

2. Mitmel viisil saab samad 10 tudengit paigutada ühte ringi?

3. Sama küsimus, kui Martin ja Kadri peavad istuma kõrvuti.

4. Sama küsimus nagu 2, aga Janno ja Robert ei tohi istuda kõrvuti.

5. Projekt koosneb 10 erinevast ülesandest. Need on vaja ära jagada Karli ja Kristjani vahel. Mitu võimalust selleks on?

6. Meil on vaja jaotada 6 turistist koosnev rühm kahte autosse, sinisesse ja punasesse nii, et kummaski autos poleks rohkem kui 4 inimeset. Mitmel viisil saab seda teha?
7. Kursusest Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse võtab osa $2n$ tudengit. Kodutöö jaoks soovib õppejõud jaotada nad paaridesse. Mitu võimalust selleks on?
8. Mitmel viisil saab rivistada n tudengit ühte ritta nii, et Martin seisab Robertist paremal?
9. Mitmel viisil saab rivistada n tudengit ühte ritta nii, et Martin seisab nii Robertist kui ka Mariast paremal?
10. Tõestada, et

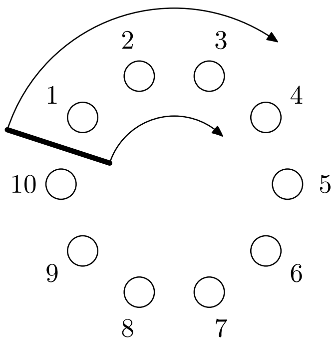
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

kui $1 \leq k \leq n-1$.

Lahendused

1. *Lahendus.* Tegemist on permutatsiooniga 10 elemendist. Valemi põhjal on võimaluste arv $P(10) = 10!$.

2. *Lahendus.* Olgu see võimaluste arv X. Kui tudengid on paigutatud ringi, siis on 10 võimalust moodustada neist rida (samas relatiivses järjestuses) – sõltuvalt sellest, millisest tudengist päripäeva lugemist alustada:



Seega $10 \cdot X = 10!$, millest $X = \frac{10!}{10} = 9!$.

3. *Lahendus.* Vaatleme Martinit ja Kadrit kui „ühte objekti“. Siis tuleb meil paigutada ringi 9 „tudengit“. Eelmise ülesande põhjal on selleks $8!$ võimalust. Kuid igas sellises ringis võib Martinit ja Kadrit omavahel paigutada kahel viisil: Martin-Kadri või Kadri-Martin. Seega on tudengite paigutamisvõimalust arv $2 \cdot 8!$.

4. *Lahendus.* Paigutusi, kus lisatingimusi ei ole, on ülesande 2 põhjal 9!. Paigutusi, kus Janno ja Robert istuvad kõrvuti, on ülesande 3 põhjal $2 \cdot 8!$. Seega paigutusi, kus Janno ja Robert ei istu kõrvuti, on $9! - 2 \cdot 8!$.

Siin me rakendasime liitmisreeglit:

$$\text{ül 4 vastus} + \text{ül 3 vastus} = \text{ül 2 vastus},$$

millest

$$\text{ül 4 vastus} = \text{ül 2 vastus} - \text{ül 3 vastus}.$$

5. *Lahendus 1.* Valime välja ülesanded, mis jäävad Karlile. Neid ülesandeid võib olla 0 või 1 või 2 või … või 10. Ülejäänud ülesanded jäävad siis Kristjanile.

Karli ülesannete arv	Valikuvõimalusi
0	$\binom{10}{0}$
1	$\binom{10}{1}$
2	$\binom{10}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
10	$\binom{10}{10}$

Kokku $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \ldots + \binom{10}{10}$ ehk $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$.

Lahendus 2. Iga ülesande puhul on kaks võimalust: ta läheb kas Karlile või Kristjanile.

1. ül	2. ül	3. ül	…	10. ül
Karl/ Kristjan	Karl/ Kristjan	Karl/ Kristjan	… …	Karl/ Kristjan

Korrutamisreegli põhjal saab ülesandeid jaotada

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{10} = 1024$$

viisil.

Üldiselt, kui ülesannete arv on n, siis saame esimesest lahendusest vastuseks $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ ning teisest lahendusest 2^n. Need on samad arvud, järelikult

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

6. *Lahendus.* Valime välja inimesed, kes lähevad punasesse autosse; ülejäänud lähevad sinisesse. Punasesse autosse võib paigutada 2, 3 või 4 inimest (siis mahub ka sinise auto inimeste arv vajalikesse piiridesse). Seega paigutamisvõimaluste arv on

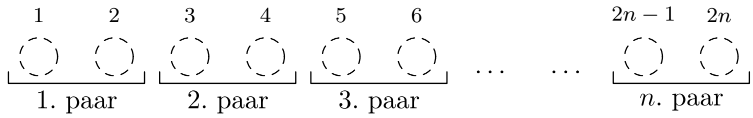
$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} = 15 + 20 + 15 = 50.$$

7. *Lahendus 1.* Hakkame neist $2n$ tudengist valima paaride kaupa tudengeid. Esimese paari valimiseks on $\binom{2n}{2}$ võimalust. Teise paari valimiseks ülejäänute seast on $\binom{2n-2}{2}$ võimalust. Nii jätkame kuni eelviimase paari valimiseks on $\binom{4}{2}$ võimalust ning viimased kaks moodustavad viimase paari.

Kuid sedasi üksteise järel paare koostades tekitasime järjestuse paaride vahel. Iga erinevat paarideks jaotust loendasime $n!$ korda (olemuselt sama paarideks jaotus saab välja tulla $n!$ erinevas järjekorras). Seega tegelik võimaluste arv on

$$\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\dots\binom{4}{2}}{n!}.$$

Lahendus 2. Järjestame tudengid ühte rivvi:

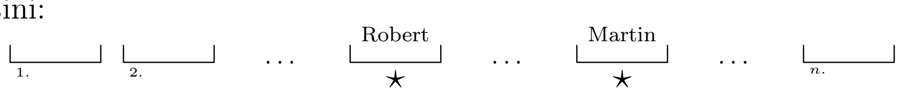


Esimene ja teine tudeng moodustavad paari. Kolmas ja neljas tudeng moodustavad paari ja nii edasi kuni lõpuks tudengid $2n-1$ ja $2n$ moodustavad paari. Rivi saab moodustada $(2n)!$ viisil.

Kuid niimoodi me loeme oluliseks nii paaride omavahelise järjekorra kui ka iga paari sees liikmete järjekorra. Paare saab omavahel ümber järjestada $n!$ viisil. Igas paaris saab liikmeid järjestada $2!$ viisil, seega n paaris $(2!)^n$ viisil. Iga selline ümberjärjestus annab tegelikult sama paarideks jaotuse. Seega erinevaid paarideks jaotusi on

$$\frac{(2n)!}{n!\,(2!)^n}.$$

8. *Lahendus.* Valime n kohast välja 2 kohta Martini ja Roberti jaoks. Selleks on $\binom{n}{2}$ võimalust. Valitud kohtadele paigutame vasakule Roberti ja paremale Martini:



Ülejäänud $n-2$ kohale paigutame ülejäänud $n-2$ tudengit. Selleks on $(n-2)!$ võimalust. Korrutamisreegli põhjal on otsitavate järjestuste arv $\binom{n}{2}(n-2)!$.

9. *Lahendus.* Valime n kohast 3 kohta Martini, Maria ja Roberti jaoks, selleks on $\binom{n}{3}$ võimalust. Martini paneme parempoolsele kohale, kuid kahele teisele kohale saame Maria ja Roberti paigutada 2 järjestuses (Maria vasakul või Robert vasakul). Seejärel paigutame $n-3$ vabale kohale ülejäänud $n-3$ tudengit, milleks on $(n-3)!$ võimalust. Kokku on järjestusi seega

$$\binom{n}{3}\cdot 2\cdot(n-3)!$$

10. *Lahendus 1.* Kasutame binoomkordajate avaldist faktoriaalide kaudu:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!}$$
$$= \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

Lahendus 2. Vaatleme n palli, mis on nummerdatud numbritega 1, 2, ..., n. Võrduse vasak pool $\binom{n}{k}$ on võimaluste arv valida nende seast k palli, kusjuures järjestus ei ole oluline.

Teisalt jaotame variandid kaheks.

- Kui pall n kuulub valitavate hulka, siis peame talle lisaks valima $k-1$ palli ülejäänud $n-1$ palli hulgast. Selleks on $\binom{n-1}{k-1}$ võimalust.
- Kui pall n ei kuulu valitavate hulka, siis peame need k palli valima ülejäänud $n-1$ palli hulgast. Selleks on $\binom{n-1}{k}$ võimalust.

Selliselt loendades saame võimaluste arvuks $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Kuna me loendame samu objekte (n-elemendilise hulga k-elemendilisi alamhulki), siis peavad ka tulemused olema võrdsed.

Harjutusülesanded

11. Ühikatoas elab kolm tudengit. Neil on kokku 4 tassi, 5 taldrikut ja 6 lusikat (kõik omavahel erinevad). Mitmel viisil saavad nad katta söögilaua (igaühele tass, taldrik ja lusikas)?

12. Kursusest võtab osa 12 tudengit. Õppejõul on 8 erinevat kodutöö ülesannet. Mitmel viisil saab tudengid jaotada 3-liikmelisteks rühmadeks ja anda igale rühmale ühe erineva kodutöö ülesande?

13. Mitmel viisil saab 10 inimest jaotada 3 rühmaks nii, et rühmad oleksid võimalikult võrdse suurusega, st igas rühmas oleks kas 3 või 4 inimest?

14. Mitmel viisil saab ruudukujulise laua äärde istuma paigutada 4 meest ja 4 naist nii, et ruudu igal küljel istuks üks mees ja üks naine? Paigutused, mis saadakse üksteisest laua pööramisega, loetakse samaks.

15. Neljakohaline PIN-kood koosneb erinevatest numbritest, kusjuures mingid numbrid on 4 ja 8. Mitu PIN-koodi vastab sellistele tingimustele?

Vastused ülesannete järjekorras: 172 800, 25 872 000, 2100, 2304, 672.