Teoreetiline informaatika

Kevad 2022

15. NP-täielikud keeled: näiteid

Polünomiaalne taandamine

Teoreem. *3-KEHT on* NP*-täielik.*

Tõestus. Kasutame eelmist teoreemi, võttes seal $L = \text{KEHT}$ ja $L' = \text{3-KEHT}$. Kõigepealt, 3-KEHT $\in \mathsf{NP}$, sest me võime valida mittedetermineeritult väärtustuse ja kontrollida, et see muudab antud 3-KNK-valemi tõeseks.

Tõestame, et keel KEHT on taandatav keelele 3-KEHT. Selleks defineerime funktsiooni f, mis seab KNK-valemile vastavusse 3-KNK-valemi. Olgu

$$\phi = (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee \ldots \vee l_{1,i_1}) \wedge (l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee \ldots \vee l_{2,i_2}) \wedge \ldots \wedge (l_{k,1} \vee l_{k,2} \vee \ldots \vee l_{k,i_k}),$$

kus $l_{i,j}$ on literaalid. Seame igale disjunktile

$$\varphi_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee \ldots \vee l_{j,i_j})$$

vastavusse 3-literaaliste disjunktide konjunktsiooni

$$\hat{\varphi}_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee z_1) \wedge (\bar{z}_1 \vee l_{j,3} \vee z_2) \wedge (\bar{z}_2 \vee l_{j,4} \vee z_3) \wedge \ldots \wedge (\bar{z}_{i_j-3} \vee l_{i_j-1} \vee l_{i_j}),$$

kus z_1, z_2, …, z_{i_j-3} on uued lausemuutujad. Olgu $f(\phi) = \hat{\varphi}_1 \wedge \hat{\varphi}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{\varphi}_k$.

Näitame, et $\phi \in \text{KEHT}$ parajasti siis, kui $f(\phi) \in \text{3-KEHT}$. See tähendab, ϕ on kehtestatav parajasti siis, kui $f(\phi)$ on kehtestatav.

1) Eeldame, et ϕ kehtestatav. Siis leidub väärtustus, millel valem ϕ on tõene. Seega on ka kõik valemi ϕ disjunktid tõesed. Vaatleme suvalist disjunkti $\varphi_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee \ldots \vee l_{j,i_j})$. Selles leidub literaal $l_{j,r}$, mis on tõene. Võttes nüüd muutujad z_1, …, z_{r-2} tõeseks ja muutujad z_{r-1}, …, z_{i_j-3} vääraks, on kõik kolmeliikmelised disjunktid tõesed:

$$(l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee \overset{t}{z_1}) \wedge (\overset{v}{\bar{z}_1} \vee l_{j,3} \vee \overset{t}{z_2}) \wedge (\overset{v}{\bar{z}_2} \vee l_{j,4} \vee \overset{t}{z_3}) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge (\overset{v}{\bar{z}_{r-2}} \vee \overset{t}{l_{j,r}} \vee \overset{v}{z_{r-1}}) \wedge \ldots \wedge (\overset{t}{\bar{z}_{i_j-3}} \vee l_{j,i_j-1} \vee l_{i_j}).$$

Nii võime valemi ϕ iga disjunkti puhul valida vabadele muutujatele sellised väärtused, et vastavad disjunktid valemis $f(\phi)$ on tõesed. Kokku saame väärtustuse, kus $f(\phi)$ on tõene. Järelikult $f(\phi)$ on kehtestatav.

2) Eeldame, et $f(\phi)$ on kehtestatav. Siis saame igas osavalemis $\hat{\varphi}_j$ määrata literaalidele $l_{j,r}$ ja muutujatele z_r sellised väärtused, et $\hat{\varphi}_j$ on tõene. Literaalide $l_{j,r}$ samade väärtuste puhul on ka vastav valemi ϕ disjunkt φ_j tõene, sest kolme literaaliga disjunkte on $l_j - 2$, aga muutujaid z_r ainult $l_j - 3$. Seega saab neist $l_j - 2$ disjunktist ülimalt $l_j - 3$ olla tõesed muutujatest z_r koostatud literaalide tõesuse tõttu ehk vähemalt üks disjunkt peab olema tõene seetõttu, et $l_{j,r}$ on tõene.

Funktsioon f on polünomiaalses ajas arvutatav, sest valemi $f(\phi)$ saab valemist ϕ konstrueerida ajaga, mis on polünomiaalne ϕ pikkuse suhtes. □

Praktikumiülesanded

1. **Definitsioon:** suunamata graafi $\mathcal{G}$ *sõltumatu hulk* on selline tippude hulk S, et hulga S iga kahe tipu u, v puhul serv tippude u ja v vahel puudub.

Defineerime keele SÕLTUMATU-HULK:

$$\mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK} = \{\langle \mathcal{G}, k\rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf, } \\ \text{kus leidub sõltumatu hulk suurusega } k\} .$$

Selles ülesandes näitame, et SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik.

(a) Tõesta, et SÕLTUMATU-HULK $\in \mathcal{NP}$.

(b) Tõesta, et SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-raske.

Lahendus. Meenutame, et keel KLIKK on defineeritud järgmiselt:

$$\mathsf{KLIKK} = \{\langle \mathcal{G}, k\rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf, kus leidub klikk suurusega } k\} .$$

On teada (näidati tunnis), et KLIKK on $\mathcal{NP}$-täielik.

(a) Vaatleme mittedeterministlikku algoritmi, mis etteantud tippude hulga puhul kontrollib, kas hulgas on täpselt k tippu ja kas seal iga kahe tipu vahel serv puudub. Kumbki kontroll tehtav polünomiaalse ajaga, sealhulgas teine kontroll $O(n^2)$ sammuga, kus n on graafi G tippude arv, sest piisab lihtsalt kõik tipupaarid läbi vaadata. Järelikult on see mittedeterministlik algoritm polünomiaalne.

(b) Taandame keele KLIKK polünomiaalselt keelele SÕLTUMATU-HULK. Defineerime funktsiooni f, mis seab sõnele $\langle G, k\rangle$ seab vastavusse sõne $\langle \overline{G}, k\rangle$, kus $\overline{G}$ on graafi G täiend. Funktsioon f on arvutatav polünomiaalses ajas graafi G tippude arvu suhtes, sest me võime läbi vaadata graafi G kõik tipupaarid (neid on polünomiaalne arv) ja igas paaris muuta serva olemasolu/mitteolemasolu vastupidiseks (tehtav polünomiaalse ajaga).

Kui $\langle G, k\rangle \in \mathsf{KLIKK}$, siis graafis G leidub k-tipuline klikk. Selle kliki tippude vahel puuduvad graafis $\overline{G}$ servad ja seal moodustavad need tipud k-tipulise sõltumatu hulga. Järelikult $\langle \overline{G}, k\rangle \in \mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK}$. Analoogiliselt saame, et kui $\langle \overline{G}, k\rangle \in \mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK}$, siis $\langle G, k\rangle \in \mathsf{KLIKK}$.

Polünomiaalsus: seega on f keele KLIKK polünomiaalne reduktsioon keelele SÕLTUMATU-HULK.

Et KLIKK on $\mathcal{NP}$-täielik ja KLIKK $\leq_P$ SÕLTUMATU-HULK, siis järelikult ka SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik.

2. Definitsioon: suunamata graafi $\mathcal{G}$ *tipukate* C on graafi $\mathcal{G}$ tippude hulga alamhulk, mille puhul graafi $\mathcal{G}$ iga serva e vähemalt üks otstipp kuulub hulka C. Defineerime keele TIPUKATE:

$$\mathsf{TIPUKATE} = \Big\{ \langle \mathcal{G}, k\rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf, } \\ \text{millel leidub } k \text{ tipust koosnev tipukate} \Big\}.$$

Selles ülesandes tõestame, et TIPUKATE on $\mathcal{NP}$-täielik.

(a) Tõesta, et TIPUKATE $\in \mathcal{NP}$.

(b) Tõesta, et TIPUKATE is $\mathcal{NP}$-raske.

Lahendus.

(a) Analoogiliselt eelmise ülesande koostame mittedeterministliku algoritmi, mis mittedeterministlikult valib k tipust koosneva hulga C ning seejärel kontrollib, kas graafi $\mathcal{G}$ iga serva vähemalt üks otstipp kuulub hulka C. Kui kõik kontrollid on edukad, siis aktsepteerib sisendit, vastasel juhul lükkab tagasi.

Kontrollid saab teostada polünomiaalse ajaga: selleks kulub maksimaalselt $O(m)$ sammu, kus m on $\mathcal{G}$ servade arv. Järelikult on see mittedeterministlik algoritm polünomiaalne.

(b) Eelmises ülesandes näitasime, et SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik. Selles ülesande konstrueerime reduktsiooni hulgalt SÕLTUMATU-HULK hulgale TIPUKATE.

Defineerime funktsiooni f, mis seab paarile $\langle \mathcal{G}, k\rangle$ vastavusse paari $\langle \mathcal{G}, n-k\rangle$, kus n on $\mathcal{G}$ tippude arv. Funktsioon f on arvutatav polünomiaalses ajas graafi $\mathcal{G}$ tippude ja servade arvu suhtes, sest k asemele tuleb lihtsalt panna $n-k$.

Valime graafist $\mathcal{G}$ mingi k tipust koosneva hulga S. Tähistagu C graafi $\mathcal{G}$ kõigi nende tippude hulka, mis ei kuulu hulka S. Selle hulga suurus on $n-k$. Järgnevalt näitame, et S on sõltumatu hulk parajasti siis kui C on tipukate.

1. Olgu S sõltumatu hulk. Vaatleme suvalist serva e, mis ühendab graafis $\mathcal{G}$ mingit kahte tippu u ja v. Ei ole võimalik, et mõlemad tipud $u, v \in S$ (sest S on sõltumatu hulk). Seega vähemalt üks tippudest u, v kuulub hulka C ehk hulk C „katab“ serva e. Seega C on tipukate.

2. Olgu C tipukate. Siis hulk C „katab“ iga serva graafis $\mathcal{G}$. Valime graafist $\mathcal{G}$ suvalise serva e. Selle vähemalt üks otstipp kuulub hulka C ning järelikult maksimaalselt üks otstipp kuulub hulka S (sest S ja C on teineteise täiendid). Seega ükski kaks hulga S tippu pole omavahel servaga ühendatud. Seega S on sõltumatu hulk.

Võime järeldada, et $\langle \mathcal{G}, k \rangle \in$ SÕLTUMATU-HULK parajasti siis, kui $\langle \mathcal{G}, n-k \rangle \in$ TIPUKATE.

Polünomiaalsus: seega f on keele SÕLTUMATU-HULK polünomiaalne reduktsioon keelele TIPUKATE.

Et aga SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik ning SÕLTUMATU-HULK $\leq_{\mathrm{P}}$ TIPUKATE, siis järelikult ka TIPUKATE on $\mathcal{NP}$-täielik.