Teoreetiline informaatika

Kevad 2022

14. NP-täielikud keeled

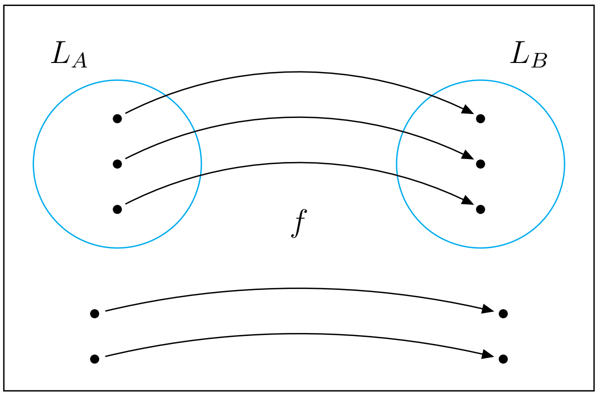
Polünomiaalne taandamine

Definition. *Funktsiooni $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ nimetatakse polünomiaalses ajas arvutatavaks, kui leidub Turingi masin, mis iga sisendsõne w puhul peatub ja jätab lindile sõne $f(w)$, kusjuures masina tööaeg on $|w|$ suhtes polünoom.*

Definition. *Keel L_A on polünomiaalselt kujutusega taandatav keelele L_B ehk $L_A \leq_P L_B$, kui leidub selline polünomiaalse ajas arvutatav funktsioon $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, et iga w puhul*

$$w \in L_A \Leftrightarrow f(w) \in L_B.$$

Funktsiooni f nimetame keele L_A polünomiaalseks reduktsiooniks keelele L_B.



Theorem. *Kui $L_A \leq_P L_B$ ja $L_B \in \mathsf{P}$, siis $L_A \in \mathsf{P}$.*

Tõestus. Olgu M polünomiaalne algoritm, mis lahendab keelt L_B, ja f keele L_A polünomiaalne reduktsioon keelele L_B. Vaatleme algoritmi M', mis sisendil w

1. arvutab $f(w)$;
2. teeb läbi algoritmi M töö sisendil $f(w)$ ja tagastab M väljundile vastava tulemuse.

Tõestame, et M' lahendab keelt L_A. Seos $w \in L_A$ kehtib parajasti siis, kui $f(w) \in L_B$, sest f on reduktsioon. Viimane tingimus kehtib parajasti siis, kui M aktsepteerib sõnet $f(w)$. See omakorda kehtib parajasti siis, kui M' aktsepteerib sõnet w.

Tõestame, et M' tööaeg on polünomiaalne. Tõepoolest, sammu 1 tegemiseks kulub polünomiaalne aeg ning ka sammu 2 tegemiseks kulub polünomiaalne aeg, sest kahe polünoomi kompositsioon on polünoom. $\square$

SAT

Lausemuutujat (ehk Boole'i muutujat) või selle eitust nimetame *literaaliks*. Näiteks x_1, x_{15}, $\bar{x}_{23}$, z_{10} on literaalid. Eitust tähistame kriipsuga muutuja nime kohal. Mitu omavahel disjunktsiooniga („või"-tehtega) ühendatud literaali moodustavad *disjunkti*, näiteks $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_{15} \vee \bar{x}_{23})$ on üks disjunkt. Samasse disjunkti võib korraga kuuluda kaks ühest ja samast muutujast moodustatud vastandlikku literaali, üks eitusega ja teine ilma; selline disjunkt on loomulikult samaselt tõene.

Lausearvutuse valem (ehk Boole'i valem) on *konjunktiivsel normaalkujul* ehk *KNK-valem*, kui ta koosneb mitmest konjunktsiooniga („ja"-tehtega) ühendatud disjunktist, nagu näiteks

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_{15} \vee \bar{x}_{23}) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_7) \wedge (x_3 \vee \bar{x}_{20}).$$

Lausearvutuse valem on *3-KNK-valem*, kui ta on KNK-valem ja kõik disjunktid koosnevad täpselt kolmest literaalist, näiteks

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_{15}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_{11}).$$

Defineerime keeled

$$\text{KEHT} = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ on kehtestatav KNK-valem}\},$$
$$\text{3-KEHT} = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ on kehtestatav 3-KNK-valem}\}.$$

Definition. *Keelt L nimetatakse* NP*-täielikuks, kui ta rahuldab korraga järgmist kahte tingimust:*

1. $L \in \mathsf{NP}$;

2. *keel L on* NP*-raske, s.t iga keel $L' \in \mathsf{NP}$ on polünomiaalselt taandatav keelele L.*

Sellest definitsioonist järeldub otse, et kui keel L on NP-täielik ja $L \in \mathsf{P}$, siis $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Theorem. *Kui keel L on NP-täielik ja mingi keele $L' \in \mathsf{NP}$ puhul $L \leq_P L'$, siis ka keel L' on NP-täielik.*

Tõestus. See, et $L' \in \mathsf{NP}$, on antud. Veel on vaja tõestada, et iga keel $L_0 \in \mathsf{NP}$ on polünomiaalselt taandatav keelele L'. Kuna keel L on eelduse kohaselt NP-täielik, siis $L_0 \leq_{\mathrm{P}} L$. Seega kehtivad reduktsioonid

$$L_0 \leq_{\mathrm{P}} L \qquad \text{ja} \qquad L \leq_{\mathrm{P}} L'.$$

Kasutades polünomiaalse taandamise definitsiooni, saame siit $L_0 \leq_{\mathrm{P}} L'$. Järelikult iga keele $L_0 \in \mathsf{NP}$ puhul $L_0 \leq_{\mathrm{P}} L'$. $\square$

Cooki-Levini teoreem. *Keel KEHT on* NP*-täielik.*

Tõestuse idee. Sisalduvuse KEHT $\in \mathsf{NP}$ tõestamine on lihtne: etteantud valemi puhul võime mittedetermineeritult „ära arvata“ väärtustuse ja seejärel kontrollida polünomiaalse ajaga valemi pikkuse suhtes, et valem on sellel väärtustusel tõene.

Tõestamaks, et keel KEHT on NP-täielik, konstrueerime klassi NP iga keele A jaoks polünomiaalse reduktsiooni keelele KEHT. See reduktsioon seab sõnele w vastavusse lausearvutuse valemi ϕ, mis kirjeldab keelt A lahendava mittedetermineeritud Turingi masina tööd sõnel w. Kui masin aktsepteerib sõnet w, siis leidub väärtustus, millel valem ϕ on tõene. Kui masin lükkab sõne w tagasi, siis sellist väärtustust ei leidu. See tähendab, $w \in A$ parajasti siis, kui ϕ on kehtestatav. Üksikasjalikult on see tõestus läbi tehtud õpikus.

Theorem. *3-KEHT on* NP*-täielik.*

Tõestus. Kasutame eelmist teoreemi, võttes seal $L =$ KEHT ja $L' =$ 3-KEHT. Kõigepealt, 3-KEHT $\in \mathsf{NP}$, sest me võime valida mittedetermineeritult väärtustuse ja kontrollida, et see muudab antud 3-KNK-valemi tõeseks.

Tõestame, et keel KEHT on taandatav keelele 3-KEHT. Selleks defineerime funktsiooni f, mis seab KNK-valemile vastavusse 3-KNK-valemi. Olgu

$$\phi = (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee \ldots \vee l_{1,i_1}) \wedge (l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee \ldots \vee l_{2,i_2}) \wedge \ldots \wedge (l_{k,1} \vee l_{k,2} \vee \ldots \vee l_{k,i_k}),$$

kus $l_{i,j}$ on literaalid. Seame igale disjunktile

$$\varphi_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee \ldots \vee l_{j,i_j})$$

vastavusse 3-literaaliste disjunktide konjunktsiooni

$$\hat{\varphi}_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee z_1) \wedge (\bar{z}_1 \vee l_{j,3} \vee z_2) \wedge (\bar{z}_2 \vee l_{j,4} \vee z_3) \wedge \ldots \wedge (\bar{z}_{i_j-3} \vee l_{i_j-1} \vee l_{i_j}),$$

kus z_1, z_2, $\ldots$, z_{i_j-3} on uued lausemuutujad. Olgu $f(\phi) = \hat{\varphi}_1 \wedge \hat{\varphi}_2 \wedge \ldots \wedge \hat{\varphi}_k$.

Näitame, et $\phi \in$ KEHT parajasti siis, kui $f(\phi) \in$ 3-KEHT. See tähendab, ϕ on kehtestatav parajasti siis, kui $f(\phi)$ on kehtestatav.

1) Eeldame, et ϕ kehtestatav. Siis leidub väärtustus, millel valem ϕ on tõene. Seega on ka kõik valemi ϕ disjunktid tõesed. Vaatleme suvalist disjunkti $\varphi_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee \ldots \vee l_{j,i_j})$. Selles leidub literaal $l_{j,r}$, mis on tõene. Võttes nüüd muutujad z_1, $\ldots$, z_{r-2} tõeseks ja muutujad z_{r-1}, $\ldots$, z_{i_j-3} vääraks, on kõik kolmeliikmelised disjunktid tõesed:

$$(l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee \overset{t}{z_1}) \wedge (\overset{v}{\bar{z}_1} \vee l_{j,3} \vee \overset{t}{z_2}) \wedge (\overset{v}{\bar{z}_2} \vee l_{j,4} \vee \overset{t}{z_3}) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge (\overset{v}{\bar{z}_{r-2}} \vee \overset{t}{l_{j,r}} \vee \overset{v}{z_{r-1}}) \wedge \ldots \wedge (\overset{t}{\bar{z}_{i_j-3}} \vee l_{j,i_j-1} \vee l_{i_j}).$$

Nii võime valemi ϕ iga disjunkti puhul valida vabadele muutujatele sellised väärtused, et vastavad disjunktid valemis $f(\phi)$ on tõesed. Kokku saame väärtustuse, kus $f(\phi)$ on tõene. Järelikult $f(\phi)$ on kehtestatav.

2) Eeldame, et $f(\phi)$ on kehtestatav. Siis saame igas osavalemis $\hat{\varphi}_j$ määrata literaalidele $l_{j,r}$ ja muutujatele z_r sellised väärtused, et $\hat{\varphi}_j$ on tõene. Literaalide $l_{j,r}$ samade väärtuste puhul on ka vastav valemi ϕ disjunkt φ_j tõene, sest kolme literaaliga disjunkte on $l_j - 2$, aga muutujaid z_r ainult $l_j - 3$. Seega saab neist $l_j - 2$ disjunktist ülimalt $l_j - 3$ olla tõesed muutujatest z_r koostatud literaalide tõesuse tõttu ehk vähemalt üks disjunkt peab olema tõene seetõttu, et $l_{j,r}$ on tõene.

Funktsioon f on polünomiaalses ajas arvutatav, sest valemi $f(\phi)$ saab valemist ϕ konstrueerida ajaga, mis on polünomiaalne ϕ pikkuse suhtes. □

Praktikumiülesanded

1. Defineerime keele

$$\text{ALAMHULGA-SUMMA} = \{\langle S, t\rangle \mid S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \text{ on täisarvude hulk ning mingi alamhulga } \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}\} \subseteq S \text{ puhul } \textstyle\sum_{j=1}^{l} x_{i_j} = t\}.$$

Tõestada, et ALAMHULGA-SUMMA $\in \mathsf{NP}$.

2. Tõestada, et keel

$$\text{KLIKK} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ on suunamata graaf, milles leidub } k\text{-tipuline klikk}\}$$

on NP-täielik.

Lahendused

1. *Solution.* Konstrueerime mittedetermineeritud Turingi masina M, mis sisendil $\langle S, t\rangle$ töötab järgmiselt.

1. Mittedetermineeritult valib alamhulga $T \subseteq S$.
2. Kontrollib, kas $\sum\limits_{x\in T} x = t$.
3. Kui jah, siis läheb aktsepteerivasse olekusse. Kui ei, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

Tõestame, et algoritm on korrektne. Kui leidub alamhulk $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\} \subseteq S$, mille puhul $\sum_{j=1}^{l} x_{i_j} = t$, siis saab masin M selle alamhulga valida ja lõpetab seejärel töö aktsepteerivas olekus. Järelikult leidub sel juhul aktsepteeriv arvutuskäik. Kui aga sellist alamhulka ei leidu, siis viib iga valik sammul 1 sisendi tagasilükkamiseni.

Tõestame, et see mittedetermineeritud algoritm on polünomiaalne. Alamhulga valimine sammul 1 võtab polünomiaalse aja, samuti võtab polünomiaalse aja summeerimine sammul 2. Seetõttu on algoritm polünomiaalse keerukusega.

2. *Solution.* Kõigepealt, KLIKK $\in$ NP, sest me võime „ära arvata“ kliki mittedetermineeritult ja seejärel kontrollida, et selle suurus on k.

Järgnevalt näitame, et KLIKK on NP-raske. Selleks kasutame poünomiaalset taandamist keelelt 3-KEHT:

$$\text{3-KEHT} \leq_{\mathrm{P}} \text{KLIKK}.$$

Keel 3-KEHT on NP-täielik, nagu loengus tõestati.

Olgu $\phi = (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee l_{1,3}) \wedge (l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee l_{2,3}) \wedge \ldots \wedge (l_{k,1} \vee l_{k,2} \vee l_{k,3})$ suvaline 3-KNK-valem, kus $l_{j,r}$ on literaalid. Kirjeldame sellele valemile vastavusse seatavat paari $\langle G, k\rangle$, kus G on graaf ja k on täisarv.

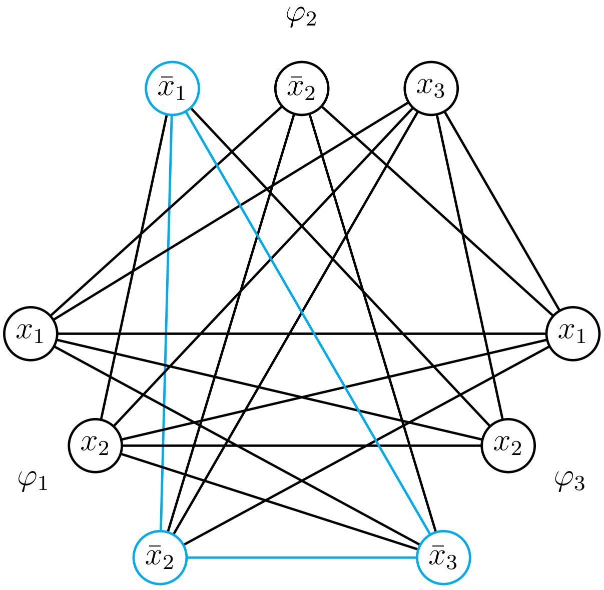
Graafi G tipud jagunevad k rühmaks, igas rühmas kolm tippu. Iga selline kolmik vastab valemi ϕ ühele disjunktile ja iga tipp ühele selle disjunkti literaalile. Täpsemalt, iga disjunkti $(l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee l_{i,3})$ jaoks on meil kolm tippu $v_{i,1}$, $v_{i,2}$ ja $v_{i,3}$. Graafis on iga kahe tipu vahel serv, välja arvatud juhul, kui

1. tipud märgivad vastandliteraale, nt $l_{j,r}$ ja $\bar{l}_{j,r}$, või
2. tipud asuvad samas disjunktis.

Näiteks 3-KNK-valemile

$$\phi = \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2)}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}_{\varphi_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)}_{\varphi_3}$$

vastab graaf



Selles graafis leidub klikk suurusega 3, isegi mitu. Joonisel märgitud klikile vastab väärtustus, kus liikmes φ_1 on $\bar{x}_2$ tõene, liikmes φ_2 on $\bar{x}_1$ tõene ning liikmes φ_3 on $\bar{x}_3$ tõene. Seega sellele klikile vastava väärtustuse puhul on muutujad x_1, x_2 ja x_3 kõik tõesed. Sellel väärtustusel on antud valem tõene ehk see valem on kehtestatav.

Tõestame, et iga 3-KNK-valemi ϕ puhul kehtib, et valemil ϕ leidub kehtestav väärtustus parajasti siis, kui graafis G leidub klikk suurusega k.

1) Eeldame, et valemil ϕ leidub kehtestav väärtustus. Siis on valemi igas disjunktis vähemalt üks literaal tõene. Valime vastavas graafis G tipud, mis tähistavad neid literaale. Kui mõnes disjunktis on tõene rohkem kui üks literaal, siis võtame neist ühe. Valitud tipud moodustava graafis G kliki, sest

1. ükski kaks tippu ei esinda vastandliteraale, sest kuna literaalid x_i ja $\bar{x}_i$ ei saa olla korraga tõesed, ei valita neile vastavaid tippe korraga, ning

2. iga tipp asub erinevas disjunktis.

Selle kliki suurus on k.

2) Eeldame, et graafis G leidub klikk suurusega k. Selle kliki kõik tipud asuvad erinevates disjunktides, sest sama disjunkti tipud omavahel ühendatud ei ole. Omistame valemi ϕ muutujatele väärtused nii, et iga sellesse klikki kuuluv literaal saaks väärtuseks tõene. See on alati võimalik, sest vastandliteraalide vahel servi pole. Selline väärtustus muudab valemi ϕ tõeseks, sest igasse disjunkti kuulub üks kliki tipp, mis muudab selle disjunkti tõeseks. Järelikult on ϕ kehtestatav.

Eelkirjeldatud taandamine on polünomiaalne, sest graafi G konstrueerimine valemist ϕ võtab ainult polünomiaalse arvu samme.