Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Kevad 2022

12. Mittelahenduvad keeled

Mittelahenduvad ülesanded

Defineerime keele

$$L_{\mathrm{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ on Turingi masin ja } M \text{ aktsepteerib sõnet } w\}.$$

Theorem. *L_{TM} ei ole lahenduv keel.*

Tõestus. Tõestame selle teoreemi võtte abil, mida nimetatakse diagonaliseerimiseks. Oletame väitevastaselt, et leidub Turingi masin H, mille puhul

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{aktsepteerib,} & \text{kui } M \text{ aktsepteerib sõnet } w, \\ \text{lükkab tagasi,} & \text{kui } M \text{ ei aktsepteeri sõnet } w. \end{cases}$$

Konstrueerime uue masina D, mis kasutab masinat H alamfunktsioonina. Sisendil $\langle M\rangle$ teeb masin D järgmist.

1. Teeb läbi masina H töö sisendil $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.

2. Väljastab vastandi sellest, mida H väljastab: kui H peatub aktsepteerivas olekus, siis läheb tagasilükkavasse olekusse; kui aga H peatub tagasilükkavas olekus, siis läheb aktsepteerivasse olekusse.

Seega

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} \text{aktsepteerib,} & \text{kui } M \text{ ei aktsepteeri sisendit } \langle M\rangle, \\ \text{lükkab tagasi,} & \text{kui } M \text{ aktsepteerib sisendit } \langle M\rangle. \end{cases}$$

Mis juhtub, kui paneme masina D tööle, andes talle ette omaenda kodeeringu $\langle D\rangle$? Sel juhul

$$D(\langle D\rangle) = \begin{cases} \text{aktsepteerib,} & \text{kui } D \text{ ei aktsepteeri sisendit } \langle D\rangle, \\ \text{lükkab tagasi,} & \text{kui } D \text{ aktsepteerib sisendit } \langle D\rangle. \end{cases}$$

Sõltumata sellest, mida D teeb, peaks ta tegema vastupidist. See on vastuolu. Järelikult ei saa masinat D niimoodi konstrueerida, mis tähendab, et ka masinat H ei ole olemas. $\square$

Näitame alustuseks, et leidub keeli, mis pole isegi mitte Turingi mõttes äratuntavad.

Definition. *Keelt L nimetame Turingi mõttes kaasäratuntavaks, kui ta on mingi Turingi mõttes äratuntava keele täiend.*

Theorem. *Keel L on lahenduv parajasti siis, kui keel L on korraga Turingi mõttes äratuntav ja Turingi mõttes kaasäratuntav.*

Tõestus. (1) Eeldame, et keel L on lahenduv. Siis on ta kindlasti äratuntav. Ka keele L täiend on äratuntav, sest seda keelt tunneb ära Turingi masin, mis töötab samamoodi nagu keelt L lahendav masin, aga mis töö lõppedes läheb vastupidisesse olekusse: aktsepteeriva oleku puhul tagasilükkavasse ja tagasilükkava oleku puhul aktsepteerivasse.

(2) Eeldame, et keeled L ja $\bar{L}$ (keele L täiend) on äratuntavad. Olgu M_L Turingi masin, mis tunneb ära keelt L, ja $M_{\bar{L}}$ Turingi masin, mis tunneb ära keelt $\bar{L}$. Kirjeldame Turingi masinat M, mis lahendab keelt L. Kui masinale M anda ette sisendsõne w, siis masin M

1. paneb masinad M_L ja $M_{\bar{L}}$ sisendsõnel w tööle paralleelselt, lastes masinatel teha samme vaheldumisi: üks samm ühe masinaga, seejärel üks samm teise masinaga jne;

2. kui M_L satub aktsepteerivasse olekusse, siis peatub aktsepteerivas olekus; kui aga $M_{\bar{L}}$ satub aktsepteerivasse olekusse, siis peatub tagasilükkavas olekus.

Tõestame, et M lahendab keelt L. Kui $w \in L$, siis masin M_L aktsepteerib sõnet w ehk M_L peatub sõnel w aktsepteerivas olekus. Järelikul ka masin M peatub sõnel w aktsepteerivas olekus. Kui $w \notin L$, siis masin $M_{\bar{L}}$ peatub sõnel w aktsepteerivas olekus, mistõttu masin M peatub sõnel w tagasilükkavas olekus. $\square$

Corollary. *Keel $\bar{L}_{TM}$ ei ole Turingi mõttes äratuntav.*

Tõestus. Kui $\bar{L}_{\mathrm{TM}}$ oleks Turingi mõttes äratuntav, siis kasutades asjaolu, et L_{TM} on Turingi mõttes äratuntav, saaksime teoreemi põhjal, et L_{TM} on Turingi mõttes lahenduv. Kuid 12. nädala loengus tõestamise, et keel L_{TM} ei ole lahenduv. Vastuolu. $\square$

Defineerime keele

$$\text{PEATUB} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ on Turingi masin ja } M \text{ peatub sisendil } w\}.$$

Theorem. *Keel PEATUB on mittelahenduv.*

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et keel PEATUB on lahenduv. Tõestame, et siis on ka keel L_{TM} lahenduv.

Olgu M_{H} Turingi masin, mis lahendab keelt PEATUB. Kasutades masinat M_{H}, konstrueerime masina M_L, mis lahendab keelt L_{TM}. Masin M_L tegutseb sisendil $\langle M, w\rangle$ järgmiselt.

1. Teeb läbi masina M_{H} töö sisendil $\langle M, w\rangle$. Kuna oletame, et PEATUB on lahenduv, siis M_{H} kindlasti peatub.

2. Kui M_{H} peatus tagasilükkavas olekus, siis läheb M_L tagasilükkavasse olekusse.

3. Kui M_{H} peatus aktsepteerivas olekus, siis teeb M_L läbi masina M töö sisendil w kuni peatumiseni, mis kindlasti saabub.

4. Kui M aktsepteeris sõnet w, siis läheb M_L aktsepteerivasse olekusse. Kui M lükkas sõne w tagasi, siis läheb M_L tagasilükkavasse olekusse.

Kui M aktsepteerib sõnet w, siis M_{H} aktsepteerib sisendit $\langle M, w\rangle$ ning M_L lõpetab sisendil $\langle M, w\rangle$ töö aktsepteerimisega. Kui aga M ei aktsepteeri sõnet w või töötab sellel sõnel lõpmatult, siis lõpetab M_L sisendil $\langle M, w\rangle$ töö tagasilükkamisega. Seega M_L lahendab keelt L_{TM}. Vastuolu. $\square$

Sellist tõestusmeetodit nimetatakse taandamiseks keelelt L_{TM}:

$$\underbrace{L_{\text{TM}}}_{\text{lahendab}} \quad \underset{\Longleftarrow}{\leq_{\text{M}}} \quad \underbrace{\text{PEATUB}}_{\text{lahendab}}$$

Kui leidub masin, mis lahendab keelt PEATUB, siis leidub masin, mis lahendab keelt L_{TM}. Keel PEATUB on vähemalt niisama raske kui keel L_{TM}.

Praktikumiülesanded

1. Defineerime keele

$$L_{k\text{-SÕNE}} = \{\langle A, k\rangle \mid A \text{ on determineeritud lõplik automaat} \\ \text{ja } L(A) \text{ koosneb täpselt } k \text{ sõnest, } k \in \mathbb{N}\}.$$

Tõestada, et keel $L_{k\text{-SÕNE}}$ on lahenduv.

2. Defineerime

$$L_{\emptyset} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ on Turingi masin ja } L(M) = \emptyset\}.$$

Tõestada, et $L_{\emptyset}$ on mittelahenduv.

3. Defineerime

$$L_{\text{VÕRD}} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ ja } M_2 \text{ on Turingi masinad ja } L(M_1) = L(M_2)\}.$$

Tõestada, et $L_{\text{VÕRD}}$ on mittelahenduv.

Lahendused

1. *Solution.* Konstrueerime Turingi masina M, mis lahendab keelt $L_{k\text{-SÕNE}}$. Sisendil $\langle A, k \rangle$ töötab masin M järgmiselt.

1. Teeb kindlaks automaadi A olekute arvu. Märgime seda arvu tähega p.

2. Konstrueerib determineeritud lõpliku automaadi B, mis aktsepteerib kõiki sõnesid pikkusega p või rohkem. Konstrueerib sellise determineeritud lõpliku automaadi C, et $L(C) = L(A) \cap L(B)$.

3. Kontrollib, kas $L(C) = \emptyset$. Kui $L(C) \neq \emptyset$, siis läheb tagasilükkavasse olekusse, vastasel juhul siirdub sammule 4.

4. Genereerib kõik sõned pikkusega $\leq p - 1$ ja kontrollib iga sõne puhul, kas automaat A aktsepteerib seda sõnet. Loeb kokku aktsepteeritavate sõnede arvu, märgime seda arvu tähisega c_A.

5. Kui $c_A = k$, siis läheb aktsepteerivasse olekusse, vastasel juhul läheb tagasilükkavasse olekusse.

Põhjendame, et masin M annab alati õige tulemuse.

- Kui $L(C) \neq \emptyset$, siis A aktsepteerib mõnda sõnet pikkusega $\geq p$. Pumpamislemma põhjal aktsepteerib A siis lõpmata palju sõnesid. Seega ei saa $L(A)$ koosneda täpselt k sõnest. Ka masin M lõpetab sel juhul töö tagasilükkamisega.

- Kui $L(C) = \emptyset$, siis on kõik sõned, mida A aktsepteerib, pikkusega $\leq p - 1$. Kui $c_A = k$, siis on neid sõnesid täpselt k tükki ja $L(A)$ koosneb täpselt k sõnest. Masin M lõpetab töö aktsepteerimisega. Kui $c_A \neq k$, siis koosneb $L(A)$ mingist muust arvust sõnedest ja masin M lõpetab töö tagasilükkamisega.

2. *Solution.* Taandame keelele $L_\emptyset$ keele L_{TM}, kus

$$L_{\mathrm{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ on Turingi masin ja } M \text{ aktsepteerib sõnet } w\}.$$

Viimase keele kohta teame, et see on mittelahenduv.

$$\underbrace{L_{\mathrm{TM}}}_{\text{lahenduv}} \quad \underset{\Longleftarrow}{\leq_{\mathrm{M}}} \quad \underbrace{L_\emptyset}_{\text{lahenduv}}$$

Olgu $M_\emptyset$ Turingi masin, mis lahendab keelt $L_\emptyset$. Konstrueerime selle abil Turingi masina M_L, mis lahendab keelt L_{TM}.

Suvalise Turingi masina M puhul konstrueerime masina M_w, mis lükkab tagasi kõik sõned peale w ning sõnel w töötab samamoodi nagu masin M. See tähendab, kui M aktsepteerib sõnet w, siis M_w aktsepteerib ainult sõnet w, ning kui M ei aktsepteeri sõnet w, siis M_w ei aktsepteeri ühtegi sõnet:

$$L(M_w) = \begin{cases} \{w\}, & \text{kui } M \text{ aktsepteerib sõnet } w \\ \emptyset, & \text{kui } M \text{ ei aktsepteeri sõnet } w. \end{cases}$$

Masina M_w kirjeldus on järgmine.

1. Kui sisendsõne ei ole w, siis läheb M_w tagasilükkavasse olekusse.
2. Kui sisendsõne on w, siis jäljendab M_w masina M tööd sõnel w ning tagastab vastava tulemuse.

Masin M_w on masina M järgi algoritmiliselt konstrueeritav. Masin M_w töötab täpselt samamoodi nagu masin M, ainult alguses kontrollib, kas sisend on w. Sellise kontrolli saab masinale M juurde lisada algoritmiliselt.

Nüüd koostame masina M_L. Sisendil $\langle M, w\rangle$ teeb see masin järgmist.

1. Konstrueerib Turingi masina M_w.
2. Teeb läbi masina $M_\emptyset$ töö sisendil $\langle M_w\rangle$.
3. Kui $M_\emptyset$ lõpetab aktsepteerimisega, siis läheb tagasilükkavasse olekusse; kui aga $M_\emptyset$ lõpetab tagasilükkamisega, siis läheb aktsepteerivasse olekusse.

Tõestame, et masin M_L on korrektne.

- Kui masin M aktsepteerib sõnet w, siis masin M_w aktsepteerib sõnet w. Järelikult $L(M_w) \neq \emptyset$ ja sammul 2 lõpeb masina $M_\emptyset$ töö sisendi $\langle M_w\rangle$ tagasilükkamisega. Järelikult M_L aktsepteerib sisendit $\langle M, w\rangle$.

- Kui masin M ei aktsepteeri sõnet w, siis M_w ei aktsepteeri sõnet w. Samuti ei aktsepteeri M_w ühtegi muud sisendsõnet. Seega $L(M_w) = \emptyset$. Sammul 2 lõpeb masina $M_\emptyset$ töö sisendi $\langle M_w \rangle$ aktsepteerimisega ning masin M_L lükkab sisendi $\langle M, w \rangle$ tagasi.

Sellega oleme konstrueerinud Turingi masina M_L, mis lahendab keelt L_{TM}. See aga on võimatu. Vastuolu.

3. *Solution.* Tõestame väite taandamisega

$$L_\emptyset \leq_{\mathrm{M}} L_{\mathrm{VÕRD}}.$$

Oletame väitevastaselt, et leidub Turingi masin $M_{\mathrm{VÕRD}}$, mis lahendab keelt $L_{\mathrm{VÕRD}}$. Koostame Turingi masina M_L, mis lahendab keelt $L_\emptyset$. Masin M_L töötab sisendil $\langle M \rangle$ järgmiselt.

1. Teeb läbi masina $M_{\mathrm{VÕRD}}$ töö sisendil $\langle M, M_1 \rangle$, kus M_1 on masin, mis lükkab kõik sisendid tagasi.

2. Kui $M_{\mathrm{VÕRD}}$ lõpetab aktsepteerimisega, siis läheb aktsepteerivasse olekusse. Kui aga $M_{\mathrm{VÕRD}}$ lõpetab tagasilükkamisega, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

Kõik selle algoritmi sammud on realiseeritavad. Sealhulgas M_1 on konstantne masin (sõne).

Tõestame, et masin M_L on korrektne.

- Kui $L(M) = \emptyset$, siis $L(M) = L(M_1)$ ning $M_{\mathrm{VÕRD}}$ ja M lõpetavad aktsepteerimisega.

- Kui $L(M) \neq \emptyset$, siis $L(M) \neq L(M_1)$ ning $M_{\mathrm{VÕRD}}$ ja M lõpetavad tagasilükkamisega.

Seega oleme konstrueerinud Turingi masina M_L, mis lahendab keelt $L_\emptyset$. Vastuolu keele $L_\emptyset$ mittelahenduvusega. Järelikult oletus, et $L_{\mathrm{VÕRD}}$ on lahenduv, ei kehti.