Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Kevad 2022

11. Turingi masinate kirjeldamine. Mittedetermineeritud Turingi masin.

Turingi masinate kirjeldamine

Turingi masinad teevad sedasama mida algoritmid. Nagu algoritme, võib ka Turingi masinaid kirjeldada erineval detailsuse astmel.

1. Formaalne kirjeldus. Kõik komponendid on täielikult määratletud.

2. Teostustaseme kirjeldus. Inimesele mõistetav kirjeldus, mis ütleb, mida masin teeb, kuidas pead nihutab, mida lindile kirjutab jne.

3. Kõrgtaseme kirjeldus. Kirjeldatakse algoritmi üldistes terminites, ignoreerides teostuse detaile.

Järgmisest nädalast alates piisab meile kõrgtaseme kirjeldusest.

Turingi masinale sisendi etteandmiseks tuleb sisend esitada mingis kokkulepitud vormingus, et teda saaks kirjutada sõnena Turingi masina lindile. Milline see vorming täpselt on, pole teoreetilise käsitluse juures nii oluline, kuid lepime kokku, et graafi G kodeeringut märgime tähisega $\langle G \rangle$, Turingi masina M kodeeringut tähisega $\langle M \rangle$ jne.

Example 1. Olgu $L = \{w \mid w \text{ sisaldab võrdsel arvul nulle ja ühtesid}\}$. Kirjeldame teostustasemel Turingi masinat, mis lahendab keelt L.

See Turingi masin töötab sisendil w järgmiselt.

1. Loeb lindilt järjest sümboleid ja märgistab esimese märgistamata 0-i. Kui ühtegi märgistamata 0-i järel pole, siis suundub sammule 4. Vastasel korral viib pea sisendi algusesse.

2. Loeb lindilt järjest sümboleid ja märgistab esimese märgistamata 1. Kui ühtegi märgistamata 1 järel pole, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

3. Viib pea sisendi algusesse ja siirdub sammule 1.

4. Viib pea sisendi algusesse ja läbib sisendi, kontrollides, kas leidub mõni märgistamata 1. Kui ei leidu, siis läheb aktsepteerivasse olekusse, vastasel korral läheb tagasilükkavasse olekusse.

Paljusid arvutuslikke ülesandeid saab väljendada keelte terminites. Näiteks ülesandele kontrollida, kas antud determineeritud lõplik automaat aktsepteerib antud sõnet, vastab keel

$$\begin{aligned} L_{\text{DLA}} = \{\langle A, w\rangle \mid\ & A \text{ on determineeritud lõplik automaat,} \\ & \text{mis aktsepteerib sisendsõnet } w\}. \end{aligned}$$

Kirjutis $\langle A, w\rangle$ tähistab siin sõne kujul esitatud paari, mille esimene liige on determineeritud lõpliku automaadi A kodeering (viiest komponendist Q, Σ, δ, q_0, F koosnev loend) ning teine liige sisendsõne w. Ülesanne teha kindlaks, kas automaat A aktsepteerib sõnet w, on samaväärne ülesandega kontrollida, kas paar $\langle A, w\rangle$ kuulub keelde L_{DLA}.

Theorem. *L_{DLA} on lahenduv keel.*

Tõestus. Kirjeldame Turingi masinat M, mis etteantud sisendi $\langle A, w\rangle$ puhul peatub aktsepteerivas (või tagasilükkavas) olekus, kui automaat A lõpetab sõnel w töö aktsepteerivas (või vastavalt tagasilükkavas) olekus.

Kõigepealt loeb masin M sisendi läbi ja teeb kindlaks, kas sisend on korrektsel kujul ning esitab mingit determineeritud lõplikku automaati A ja sõnet w. Kui ei, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

Seejärel emuleerib M automaadi A tööd sõnel w. Igal hetkel peab M meeles, milline on automaadi A jooksev olek ja milline on jooksev positsioon sõnes w, kirjutades selle informatsiooni masina lindile. Alguses on jooksev olek A algolek ja jooksev positsioon sõne w esimene positsioon. Seejärel uuendab M olekut ja positsiooni järjest vastavalt automaadi A üleminekufunktsioonile δ. Kui sõne w viimane sümbol on töödeldud, siis läheb M aktsepteerivasse või tagasilükkavasse olekusse vastavalt sellele, kas A sattus töö lõpus aktsepteerivasse või tagasilükkavasse olekusse. □

Sarnaselt defineerime

$$\begin{aligned} L_{\text{MLA}} = \{\langle A, w\rangle \mid\ & A \text{ on mittedetermineeritud lõplik automaat,} \\ & \text{mis aktsepteerib sisendsõnet } w\}. \end{aligned}$$

Theorem. *L_{MLA} on lahenduv keel.*

Tõestus. Kirjeldame Turingi masinat M', mis lahendab keelt L_{MLA}. Sisendil $\langle A, w\rangle$ teeb M' järgmist.

1. Teisendab A ekvivalentseks determineeritud lõplikuks automaadiks A' selles kursuses varem õpitud meetodi abil.

2. Teeb läbi eelmise teoreemi masina M töö sisendil $\langle A', w \rangle$.

3. Kui M peatub aktsepteerivas olekus, siis läheb aktsepteerivasse olekusse, vastasel korral tagasilükkavasse olekusse. $\square$

Praktikumiülesanded

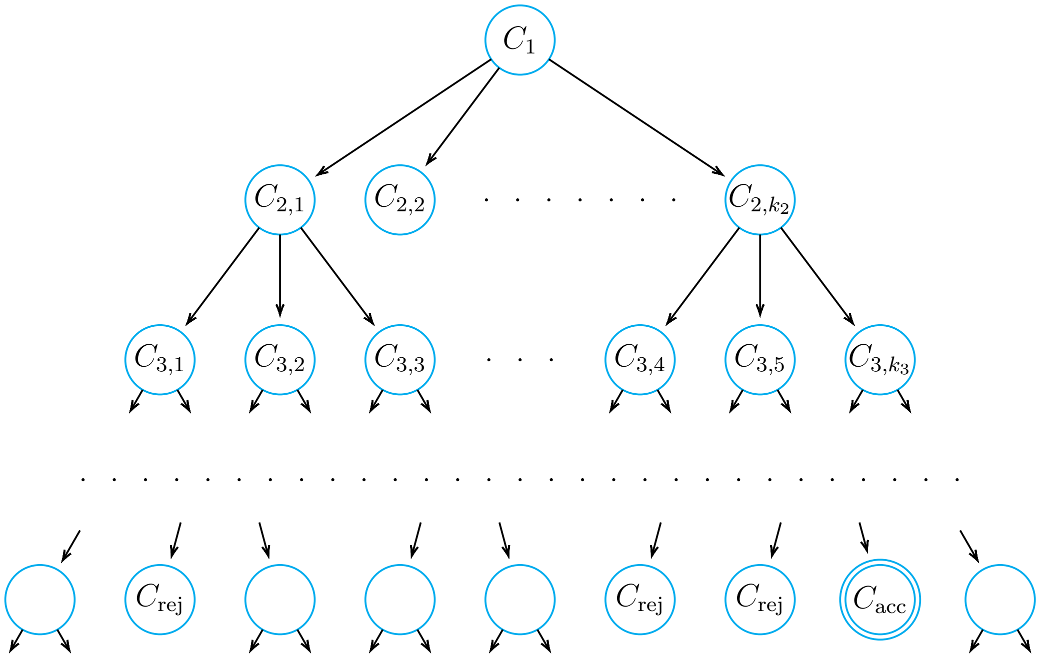
Mittedetermineeritud Turingi masin

Mittedetermineeritud Turingi masin on selline Turingi masin, kus järgnev konfiguratsioon ei tarvitse olla üheselt määratud. See tähendab, igal arvutuse hetkel võib masin minna mitmesse konfguratsiooni. Mittedetermineeritud Turingi masina üleminekufunktsioon on kujul

$$\delta\colon Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}).$$

Siin on $\mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\})$ hulga $Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}$ kõigi alamhulkade hulk. Üleminekufunktsioon seab igale oleku ja sümboli kombinatsioonile vastavusse võimalike tegevuste hulga.

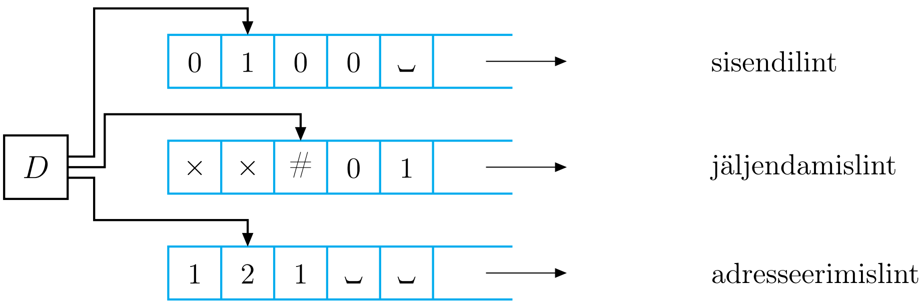
Mittedetermineeritud Turingi masina arvutuskäik on puu, mille tipud on masina konfiguratsioonid ja kaared võimalikud üleminekud ühest konfiguratsioonist järgmisse. Puu harud kujutavad masina võimalikke arvutusteid. Masin aktsepteerib sisendsõnet, kui leidub haru, mis lõpeb aktsepteeriva konfiguratsiooniga.



Theorem. *Iga mittedetermineeritud Turingi masin on ekvivalentne mingi determineeritud Turingi masinaga.*

Tõestuse idee. Jäljendame mittedetermineeritud Turingi masina tööd determineeritud Turingi masinaga D, millel on 3 linti. Masin D proovib järjest läbi üha pikemaid masina N arvutuskäike ja kui mõni neist viib aktsepteerivasse olekusse, siis läheb ka D aktsepteerivasse olekusse.

Tõestus. Konstrueerime masina D, millel on kolm linti:



Masina N arvutuskäigu puu igal tipul võib olla ülimalt b alluvat, kus b on hargnemiste võimalike valikute arvu ülemtõke, mille määrab ära masina N üleminekufunktsioon. Seame puu igale tipule vastavusse sõne tähestikus $\Gamma_b = \{1, 2, \ldots, b\}$. Näiteks 315 tähendab, et tuleb võtta juure kolmas alluv, seejärel selle esimene alluv ja omakorda selle viies alluv. On võimalik, et sõne ei vasta puu ühelegi tipule.

Masin D tegutseb järgmiselt.

1. Töö alguses on 1. lindile kirjutatud sisendsõne ning 2. ja 3. lint on tühjad.

2. Kopeerib 1. lindi sisu 2. lindile.

3. Kasutades 2. linti, jäljendab masina N tööd sisendil w mittedetermineeritud arvutuskäigu ühe haru järgi. Enne masina N iga sammu loeb 3. lindilt järgmise sümboli, mis määrab, milline variant masina N üleminekufunktsiooniga lubatute hulgast valida.

   - Kui tuleb ette aktsepteeriv konfiguratsioon, siis läheb aktsepteerivasse olekusse.
   - Kui tuleb ette tagasilükkav konfiguratsioon, siis läheb sammule 4.
   - Kui 3. lindil pole rohkem sümboleid või kui järjekordne sümbol ei vasta võimalikule harule, siis läheb sammule 4.

4. Asendab 3. lindil oleva sõne järgmise sõnega leksikograafilises järjestuses, minnes üle suurema pikkusega sõnedele, kui eelmine pikkus on ammendatud. Läheb sammule 2. □

Olgu

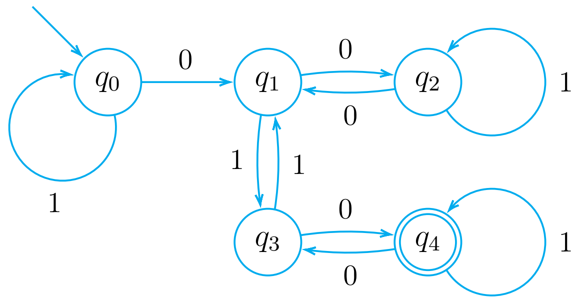
$$L_\emptyset = \{\langle A\rangle \mid A \text{ on determineeritud lõplik automaat ja } L(A) = \emptyset\}.$$

See tähendab, automaadi A kodeering kuulub keelde parajasti siis, kui A ei tunne ära ühtegi sõnet.

Theorem. *$L_\emptyset$ on lahenduv keel.*

Tõestus. Kirjeldame Turingi masinat $\widehat{M}$, mis tunneb ära keelt $L_\emptyset$. Determineeritud lõplik automaat aktsepteerib vähemalt ühte sõnet parajasti siis, kui automaadi algolekust on võimalik mööda kaari liikudes jõuda aktsepteerivasse olekusse. Seega kontrollib Turingi masin $\widehat{M}$, kas etteantud automaadi puhul leidub selline ahel.

Näiteks automaadis

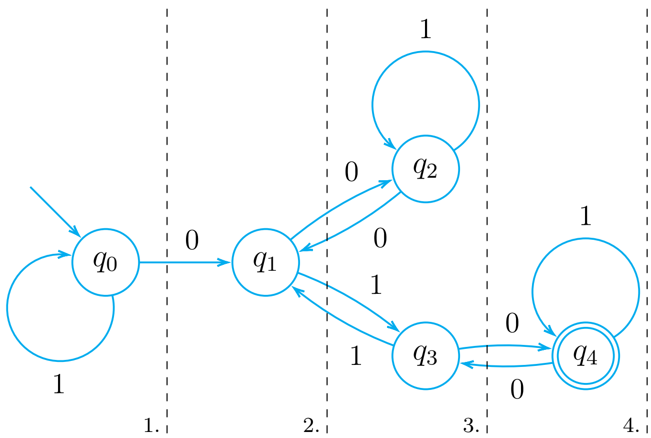


on võimalik liikuda algolekust q_0 aktsepteerivasse olekusse q_4 mööda ahelat $q_0 \to q_1 \to q_3 \to q_4$. See vastab sisendist sõne 010 lugemisele. Järelikult $L(A) \neq \emptyset$, sest $010 \in L(A)$. Seega selle automaadi kodeering keelde $L_\emptyset$ ei kuulu.

Turingi masina $\widehat{M}$ töötamise algoritm on järgmine.

1. Märgi ära A algolek.
2. Korda, kuni enam uusi olekuid ei märgita:
   - Märgi ära iga olek, kuhu viib mõnest juba märgitud olekust kaar.
3. Kui pole märgitud ühtegi aktsepteerivat olekut, siis mine tagasilükkavasse olekusse, vastasel juhul mine aktsepteerivasse olekusse.

Ülal näiteks toodud automaadi puhul märgitakse olekud ära sellises järjekorras: esmalt q_0, siis q_1, siis q_2 ja q_3 ning lõpuks q_4.



Kuna aktsepteeriv olek saab märgitud, siis läheb masin $\widehat{M}$ tagasilükkavasse olekusse. $\square$

1. Defineerime keele

$$L_{\text{DLAVÕRD}} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ ja } B \text{ on determineeritud lõplikud automaadid} \\ \text{ning } L(A) = L(B)\}.$$

Tõestada, et $L_{\text{DLAVÕRD}}$ on lahenduv keel.

2. Defineerime keele

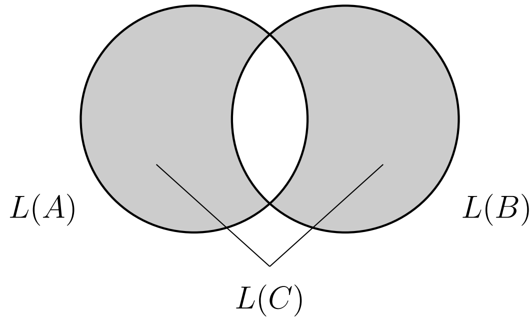
$$L_1 = \{\langle A\rangle \mid A \text{ on lõplik automaat, mis aktsepteerib mõnda sõnet kujul } 1^*\}.$$

Tõestada, et keel L_1 on lahenduv.

Lahendused

1. *Solution.* Kõigepealt konstrueerime uue determineeritud lõpliku automaadi C, mis aktsepteerib sõnesid, mida aktsepteerib kas automaat A või automaat B, aga mitte mõlemad. Seega automaadi C keele puhul peab kehtima

$$L(C) = \big(L(A) \cap \overline{L(B)}\,\big) \cup \big(\,\overline{L(A)} \cap L(B)\big).$$



Kuna regulaarse keele täiend, samuti regulaarsete keelte ühisosa ja ühend on regulaarsed, siis on selline automaat C olemas.

Automaadi C keele põhjal saame otsustada automaatide A ja B keelte võrdsuse üle.

- Kui $L(A) = L(B)$, siis $L(A) \cap \overline{L(B)} = \emptyset$ ja $\overline{L(A)} \cap L(B) = \emptyset$, mistõttu $L(C) = \emptyset$.
- Kui $L(A) \neq L(B)$, siis leidub sõne w, et $w \in L(A)$ ja $w \notin L(B)$ (või vastupidi). Siis aga $w \in L(A) \cap \overline{L(B)}$, kust $w \in L(C)$ ehk $L(C) \neq \emptyset$.

Seega $L(A) = L(B)$ parajasti siis, kui $L(C) = \emptyset$.

Koostame Turingi masina M, mis sisendil $\langle A, B\rangle$ tegutseb järgmiselt.

1. Konstrueerib automaadi C nagu kirjeldatud.
2. Käivitab Turingi masina, mis lahendab keelt $L_\emptyset$, andes sellele masinale ette sisendi $\langle C\rangle$.
3. Kui $\langle C\rangle \in L_\emptyset$, siis läheb aktsepteerivasse olekusse; kui aga $\langle C\rangle \notin L_\emptyset$, siis läheb tagasilükkavasse olekusse.

2. *Solution.* Koostame Turingi masina M, mis lahendab keelt L_1. See masin teeb sisendil $\langle A\rangle$ järgmist.

1. Konstrueerib determineeritud lõpliku automaadi B, mis aktsepteerib parajasti kõiki sõnesid kujul 1^*.

2. Konstrueerib sellise determineeritud lõpliku automaadi C, et

$$L(C) = L(A) \cap L(B).$$

3. Kontrollib, kas $\langle C \rangle \in L_\emptyset$. Kui ei, siis lõpetab töö aktsepteerimisega; kui jah, siis tagasilükkamisega.

Põhjendame, et see masin annab alati õige tulemuse.

- Kui $\langle C \rangle \in L_\emptyset$, siis $L(C) = \emptyset$ ehk $L(A) \cap L(B) = \emptyset$. Seega jäävad kõik keele $L(A)$ sõned keelest $L(B)$ väljapoole ehk ükski keele $L(A)$ sõne ei ole genereeritav avaldisega 1^*.

- Kui $\langle C \rangle \notin L_0$, siis $L(C) \neq \emptyset$ ehk $L(A) \cap L(B) \neq \emptyset$. Seega leidub sõne w, et $w \in L(A)$ ja $w \in L(B)$. Järelikult leidub keeles $L(A)$ sõne, mida saab genereerida avaldisega 1^*.