Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2015

14. jaanuari eksami lahendused

1. Millised järgmistest võrdustest on tõesed või väärad? Põhjenda vastuseid.

(a) $n^{10} \cdot \log n = O(n^{10} + n^9)$;

(b) $2^n = o(3^n)$;

(c) $(\log_2 n)^2 = O(\sqrt{n})$.

Lahendus. (a) Väär, sest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10} \cdot \log n}{n^{10} + n^9} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{1 + \frac{1}{n}} = \infty.$$

Järelikult kasvab vasaku ja parema poole suhe tõkestamatult. Seega iga konstandi $C > 0$ ja iga naturaalarvu n_0 puhul saame leida naturaalarvu $n > n_0$, et $n^{10} \cdot \log n \geq C(n^{10} + n^9)$.

(b) Tõene, sest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

(c) Tõene. Et $\log_2 n = \frac{\ln n}{\ln 2}$, siis l'Hospitali reegli põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)^2}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \log_2 n \cdot \frac{1}{n \ln 2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \log_2 n}{\sqrt{n} \ln 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 \frac{1}{n \ln 2}}{\frac{\ln 2}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{(\ln 2)^2 \sqrt{n}} = 0.$$

Järelikult valides vabalt konstandi $C > 0$, leidub selline naturaalarv n_0, et iga $n > n_0$ puhul $(\log_2 n)^2 < C\sqrt{n}$.

2. Defineerime keele

$$\mathcal{L}_7 = \left\{ \langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ on Turingi masin ja } L(\mathcal{M}) = \{0^n 1^{7n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \right\} .$$

Selles ülesandes näitad, et $\mathcal{L}_7$ on mittelahenduv keel.
Juhis: näiteks võid kasutada taandamist keelelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$. Eeldame, et leidub Turingi masin $\mathcal{M}_7$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_7$. Konstrueeri Turingi masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$, mis lahendab keelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$, kus

$$\mathcal{L}_{\mathrm{TM}} = \{\langle \mathcal{M}, w \rangle \mid \mathcal{M} \text{ on Turingi masin ja } \mathcal{M} \text{ aktsepteerib sisendsõnet } w\} .$$

Sisendil $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ teeb masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ järgmist.

1. Konstrueerib masina $\mathcal{M}_w$, mis sisendil x teeb järgmist.
   (a) „Simuleerib“ masina $\mathcal{M}$ töökäiku sõnel w.
   (b) Kui $\mathcal{M}$ peatub tagasilükkamisega, siis $\mathcal{M}_w$ peatub tagasilükkamisega.
   (c) Kui $\mathcal{M}$ peatub aktsepteerimisega, siis $\mathcal{M}_w$ kontrollib, kas sõne x on kujul $0^n 1^{7n}$, $n \in \mathbb{N}$. Kui jah, siis peatub aktsepteerimisega. Kui ei, siis peatub tagasilükkamisega.
2. Teeb masina $\mathcal{M}_7$ abil kindlaks, kas $L(\mathcal{M}_w) = \{0^n 1^{7n}\}$. Kui jah, siis peatub aktsepteerimisega. Kui ei, siis peatub tagasilükkamisega.

Vii lõpule taandamise detailid, kui vaja, ja näita, et $\mathcal{L}_7$ on mittelahenduv keel.

Lahendus. Eeldame, et keel $\mathcal{L}_7$ on lahenduv ja $\mathcal{M}_7$ Turingi masin, mis seda keelt lahendab. Konstrueerime Turingi masina $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$, mis tegutseb sisendil $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ nii, nagu kirjeldatud ülesande tekstis.

Kui $\langle M, w \rangle \in \mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$, siis masin $\mathcal{M}$ peatub sisendil w aktsepteerimisega. Siis punkti 1c põhjal aktsepteerib konstrueeritud masin $\mathcal{M}_w$ kõiki sisendsõnesid x kujul $0^n 1^{7n}$, ja ainult neid. Seega $L(\mathcal{M}_w) = \{0^n 1^{7n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Seetõttu lõpeb punktis 2 masina $\mathcal{M}_7$ töö ja ka masina $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ töö aktsepteerimisega.

Kui $\langle M, w \rangle \notin \mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$, siis masin $\mathcal{M}$ kas peatub sisendil w tagasilükkamisega või ei peatu üldse. Mõlemal juhul ei aktsepteeri masin $\mathcal{M}_w$ ühtegi sõnet x, st $L(\mathcal{M}_w) = \emptyset$. Sel juhul lõpeb punktis 2 masina $\mathcal{M}_7$ töö ja siis ka masina $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ töö tagasilükkamisega.

Kokkuvõttes saame, et masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ aktsepteerib sisendit $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ parajasti siis, kui masin $\mathcal{M}$ aktsepteerib sõnet w. Teiste sõnadega, masin $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ lahendab keelt $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$. Kuid keel $\mathcal{L}_{\mathrm{TM}}$ on mittelahenduv, seega ei saa masinat $\mathcal{M}_{\mathrm{TM}}$ olemas olla. Järelikult ei saa olemas olla ka keelt $\mathcal{L}_7$ lahendavat masinat.

3. **<u>Definitsioon:</u>** suunamata graafi $\mathcal{G}$ *tsenter* on selline tipp v, et graafi $\mathcal{G}$ iga tipu u puhul, kus $v \neq u$, leidub suunamata serv tippude u ja v vahel. (Teiste sõnadega, tsenter on tipp, mis on ühendatud kõigi ülejäänud tippudega.)

   Defineerime keele $\mathsf{LEIDUBTSENTER}$:

$$\mathsf{LEIDUBTSENTER} = \{\langle \mathcal{G}, v \rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf tsentriga } v\ \} \ .$$

   Kas $\mathsf{LEIDUBTSENTER} \in \mathcal{P}$? Põhjenda vastust.

   Lahendus. Jah, sest etteantud sisendi $\langle G, v \rangle$ puhul võime koostada tsükli üle graafi G kõigi v-st erinevate tippude, kus iga tipu puhul kontrollitakse, kas see tipp on ühendatud tipuga v. Sisalduvus $\langle G, v \rangle \in \mathsf{LEIDUBTSENTER}$ kehtib parajasti siis, kui kõik kontrollitavad tipud on tipuga v ühendatud.

   Selle tsükli sisu täidetakse $O(n)$ korda, kus n on graafi tippude arv, st tsükli sisu täitmiste arv on polünomiaalne. Tsükli sisus kulub serva leidumise kontrollimiseks samuti polünomiaalne arv samme. Et kahe polünoomi kompositsioon on polünoom, siis on kirjeldatud algoritmi kogukeerukus polünomiaalne.

4. **<u>Definitsioon:</u>** suunamata graafi $\mathcal{G}$ *sõltumatu hulk* on selline tippude hulk S, et hulga S iga kahe tipu u, v puhul serv tippude u ja v vahel puudub.

   Defineerime keele $\mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK}$:

$$\mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK} = \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{G}, k \rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf,} \\ \qquad\qquad \text{kus leidub sõltumatu hulk suurusega } k \end{array} \right\} .$$

   Selles ülesandes näitad, et $\mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK}$ on $\mathcal{NP}$-täielik.

   (a) Tõesta, et $\mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK} \in \mathcal{NP}$.

   (b) Tõesta, et $\mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK}$ on $\mathcal{NP}$-raske.

   <u>Juhis:</u> võid keele KLIKK polünomiaalselt taandada keelele $\mathsf{SÕLTUMATU\text{-}HULK}$. Meenutame, et keel KLIKK on defineeritud järgmiselt:

$$\mathsf{KLIKK} = \{\langle \mathcal{G}, k \rangle \mid \mathcal{G} \text{ on suunamata graaf, kus leidub klikk suurusega } k\} \ .$$

   On teada (näidati tunnis), et KLIKK on $\mathcal{NP}$-täielik.

   Lahendus. (a) Vaatleme mittedetermineeritud algoritmi, mis etteantud tippude hulga puhul kontrollib, kas hulgas on täpselt k tippu ja kas seal iga kahe tipu vahel serv puudub. Kumbki kontroll tehtav polünomiaalse ajaga, sealhulgas teine kontroll $O(n^2)$ sammuga, kus n on graafi G tippude arv, sest piisab lihtsalt kõik tipupaarid läbi vaadata. Järelikult on see mittedetermineeritud algoritm polünomiaalne.

(b) Taandame keele KLIKK polünomiaalselt keelele SÕLTUMATU-HULK. Defineerime funktsiooni f, mis seab sõnele $\langle G, k\rangle$ seab vastavusse sõne $\langle \overline{G}, k\rangle$, kus $\overline{G}$ on graafi G täiend. Funktsioon f on arvutatav polünomiaalse ajaga graafi G tippude arvu suhtes, sest me võime läbi vaadata graafi G kõik tipupaarid (neid on polünomiaalne arv) ja igas paaris muuta serva olemasolu/mitteolemasolu vastupidiseks (tehtav polünomiaalse ajaga).

Kui $\langle G, k\rangle \in$ KLIKK, siis graafis G leidub k-tipuline klikk. Selle kliki tippude vahel puuduvad graafis $\overline{G}$ servad ja seal moodustavad need tipud k-tipulise sõltumatu hulga. Järelikult $\langle \overline{G}, k\rangle \in$ SÕLTUMATU-HULK. Analoogiliselt saame, et kui $\langle \overline{G}, k\rangle \in$ SÕLTUMATU-HULK, siis $\langle G, k\rangle \in$ KLIKK

Seega on f keele KLIKK polünomiaalne reduktsioon keelele SÕLTUMATU-HULK. Et KLIKK on $\mathcal{NP}$-täielik ja KLIKK $\leq_{\mathrm{P}}$ SÕLTUMATU-HULK, siis ka SÕLTUMATU-HULK on $\mathcal{NP}$-täielik.