Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse

Sügis 2017

Kontrolltöö lahendused

1. 10 õpilasest koosnev rühm saabus poodi, kus müüakse õhupalle. Õhupalle on nelja värvi: kollased, punased, rohelised ja sinised. Eeldame, et iga värvi õhupalle on lõpmata palju.

(a) Iga laps valib ühe õhupalli. Mitmel viisil saavad lapsed endale õhupalle valida?

(b) Iga laps valib kolm õhupalli. Mitmel viisil saavad lapsed endale õhupalle valida?

(c) Iga laps valib vähemalt ühe õhupalli, nii, et kõik tema õhupallid on eri värvi. Mitmel viisil saavad lapsed endale õhupalle valida?

(d) Eeldame nüüd, et poes on ainult 3 kollast, 2 punast, 1 roheline ja 4 sinist õhupalli (kokku 10 õhupalli). Iga laps saab ühe õhupalli. Mitu võimalust selleks on?

(e) Eeldame nüüd, et poes on 18 ühesugust kollast õhupalli, mis jaotatakse ära 10 lapse vahel. Mitmel viisil saab seda teha?

(f) Nagu (e), aga lisaks on teada, et ükski laps ei saa rohkem kui 4 õhupalli. Mitmel viisil saab seda teha?

Lahendus. (a) Iga laps saab sõltumata ülejäänutest valida endale õhupalli 4 värvi hulgast. Seega 10 last saavad õhupalle valida $4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 4^{10}$ viisil.

(b) Iga laps valib 4 värvi hulgast 3, kusjuures kordumised on lubatud. Seega igal lapsel on valikuvõimalusi $\left(\!\binom{4}{3}\!\right) = 20$. Järelikult 10 last saavad õhupalle valida 20^{10} viisil.

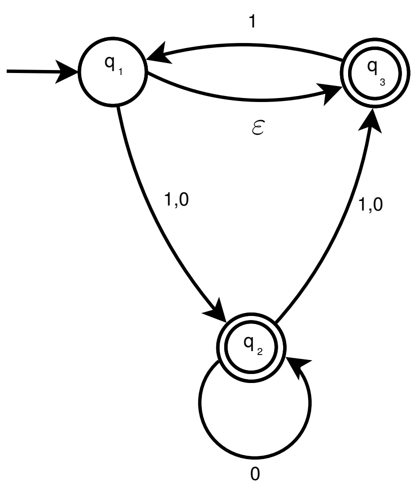
(c) Iga lapse valikuks sobib ükskõik milline antud värvide hulga alamhulk, välja arvatud tühi hulk. Et 4-elemendilisel hulgal on $2^4 = 16$ alamhulka, siis iga laps saab valiku teha $16 - 1 = 15$ viisil. Järelikult 10 last saavad õhupalle valida 15^{10} viisil.

(d) Eeldame, et lapsed on mingi tunnuse (näiteks pikkuse) alusel järjestatud. Seame õhupallid mingisse järjestusse ning laseme lastel võtta sealt õhupalle järjest. Seega võimalusi õhupalle laste vahel jagada on sama palju, kui mitmel viisil saab neid järjestada. Seda saab teha $\frac{10!}{3!2!1!4!} = 12600$ viisil.

(e) Valime 10-elemendilisest laste hulgast välja 18 elementi, kusjuures kordumised on lubatud, ning anname igale lapsele nii mitu õhupalli, kui mitu korda ta valikus esineb. Seega õhupallide jaotamiseks on $\left(\!\binom{10}{18}\!\right) = 4686825$ võimalust.

(f) Kasutame elimineerimisvalemit. Defineerime omadused P_i = „laps i saab vähemalt 5 õhupalli“ ($i = 1, \ldots, 10$). Võimalusi jaotada õhupalle nii, et vähemalt k lapse puhul kehtib omadus P_i, on $W(k) = \binom{10}{k}\left(\!\binom{10}{18-5k}\!\right)$. Selleks valime 10 lapsest välja k last ja anname igaühele 5 õhupalli, ülejäänud $18-5k$ õhupalli jaotame laste vahel ükskõik millisel viisil. Juhul $k > 3$ on $W(k) = 0$. Elimineerimisvalemi põhjal on õhupallide jaotamiseks laste vahel võimalusi $W(0)-W(1)+W(2)-W(3) = \left(\!\binom{10}{18}\!\right) - \binom{10}{1}\left(\!\binom{10}{13}\!\right) + \binom{10}{2}\left(\!\binom{10}{8}\!\right) + \binom{10}{3}\left(\!\binom{10}{3}\!\right) = 780175$.

2. Teisendada järgmine mittedeterministlik lõplik automaat ekvivalentseks deterministlikuks automaadiks. Esita teisendusprotsessi kõik sammud.

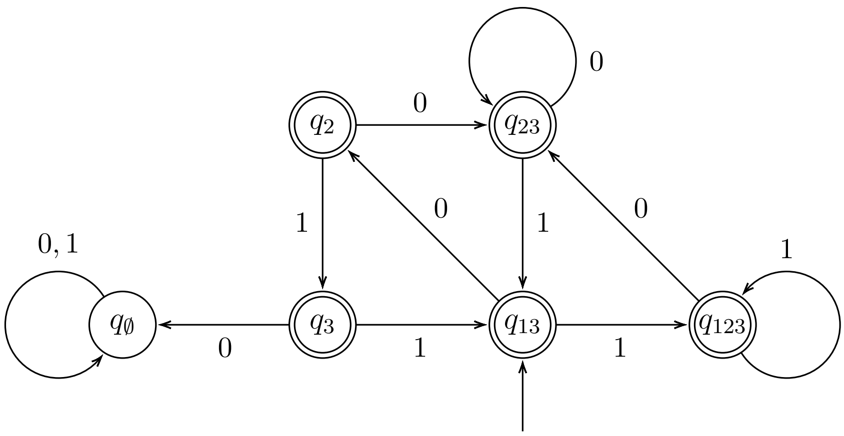


Lahendus. Vastava deterministliku automaadi tähestik on $\{0, 1\}$, olekute hulk $\{q_\emptyset, q_1, q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{123}\}$, algolek q_{13} (sest antud automaadis on ε-kaar olekust q_1 olekusse q_3), aktsepteerivate olekute hulk $\{q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{123}\}$

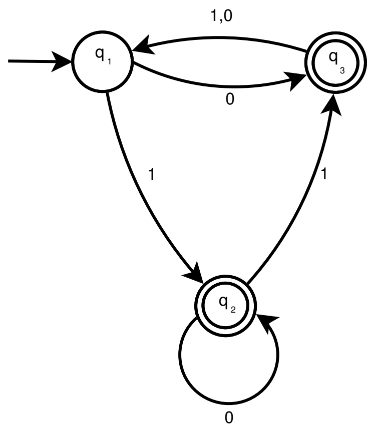
ja üleminekufunktsioon

	0	1
$q_\emptyset$	$q_\emptyset$	$q_\emptyset$
q_1	q_2	q_2
q_2	q_{23}	q_3
q_3	$q_\emptyset$	q_{13}
q_{12}	q_{23}	q_{23}
q_{13}	q_2	q_{123}
q_{23}	q_{23}	q_{13}
q_{123}	q_{23}	q_{123}

Olekud q_1 ja q_{12} võime kustutada, sest nendesse automaat minna ei saa. Ülejäänud olekud annavad järgmise olekudiagrammi:

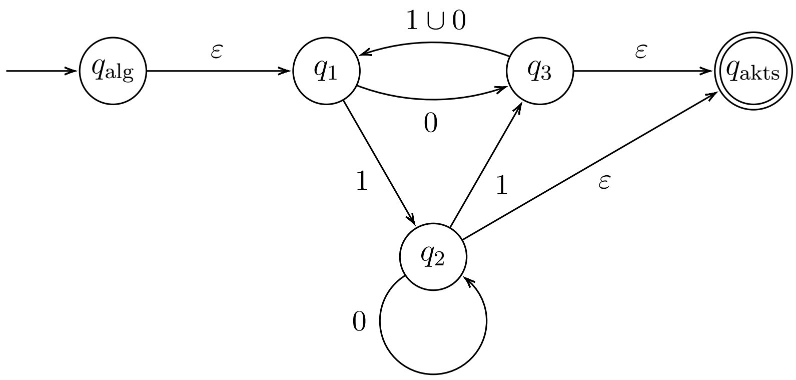


3. Konstrueeri regulaaravaldis keele $\mathcal{L}$ jaoks, mis on defineeritud järgmise deterministliku lõpliku automaadiga:

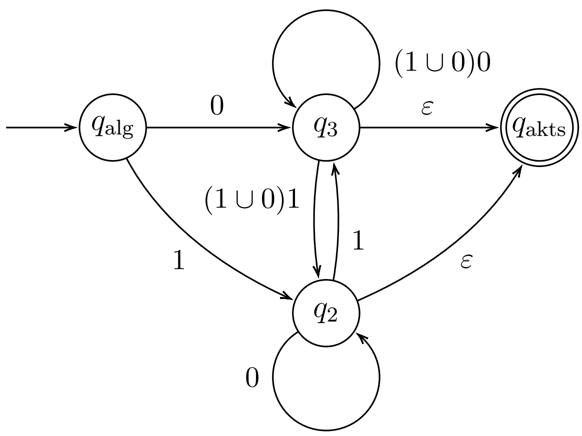


Esita kõik algoritmi sammud.

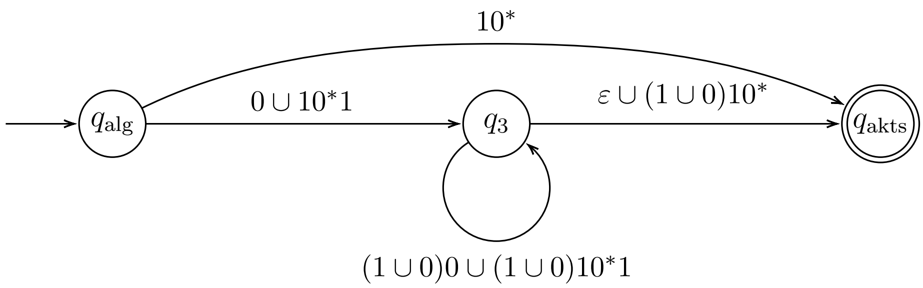
Lahendus. Lisame uue algoleku ja aktsepteeriva oleku:



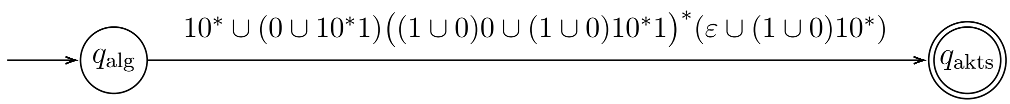
Eemaldame oleku q_1:



Eemaldame oleku q_2:



Eemaldame oleku q_3:



Viimase automaadi kaare märgend ongi otsitav regulaaravaldis.

4. Olgu $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ tähestik. Vaatleme sõnesid $w \in \Sigma^*$.

(a) Kas järgmine keel on regulaarne? Põhjenda vastust.

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \, w \;\middle|\; w \text{ igas alamsõnes pikkusega 3 on numbrite summa 3} \, \right\} .$$

Näiteks $01201 \in \mathcal{L}_1$, aga $01112 \notin \mathcal{L}_1$.

(b) Olgu $n \geq 3$ täisarv. Kas järgmine keel on regulaarne? Põhjenda vastust.

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \, w \;\middle|\; w \text{ igas alamsõnes pikkusega } n \text{ on numbrite summa vähemalt } n \, \right\} .$$

(c) Tõesta, et järgmine keel ei ole regulaarne:

$$\mathcal{L}_3 = \left\{ \, w \;\middle|\; \begin{array}{l} w \text{ esimese } n \text{ numbri summa on vähemalt sama suur} \\ \qquad\qquad \text{kui viimase } n \text{ numbri summa (iga } n \geq 1 \text{ puhul)} \end{array} \right\} .$$

Lahendus.

(a) Keel on regulaarne. Vaatleme järgmist deterministlikku lõplikku automaati tähestikul $\Sigma = \{0, 1, 2\}$:

- $Q = \{q_{i_1 i_2 i_3} \mid i_1, i_2, i_3 \in \{*, 0, 1, 2\}\}$.
- $q_0 = q_{***}$
- $F = \{q_{i_1 i_2 i_3} \mid i_1 = * \text{ või } i_2 = * \text{ või } i_3 = * \text{ või } i_1 + i_2 + i_3 = 3\}$
- δ on määratud valemiga

$$\delta(q_{i_1 i_2 i_3}, k) = \begin{cases} q_{i_2 i_3 k}, & \text{kui } q_{i_1 i_2 i_3} \in F, \\ q_{i_1 i_2 i_3}, & \text{kui } q_{i_1 i_2 i_3} \notin F. \end{cases}$$

See automaat kodeerib järjestikuste sümbolite kolmikuid oma olekute abil. Kui automaat leiab kolmiku, mille numbrite summa ei ole 3, siis jääb ta olenemata järgmistest sümbolitest samasse mitteaktsepteerivasse olekusse.

(b) Keel on regulaarne. Selle automaadi saab konstrueerida sama ideega. Olgu

- $Q = \{q_{i_1 i_2 \ldots i_n} \mid i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{*, 0, 1, 2\}\}$
- $q_0 = q_{** \ldots *}$
- $F = \{q_{i_1 i_2 \ldots i_n} \mid i_1 = * \text{ või } \ldots \text{ või } i_n = * \text{ või } i_1 + i_2 + \ldots + i_n \geq n\}$

- δ on määratud valemiga

$$\delta(q_{i_1 i_2 \ldots i_n}, k) = \begin{cases} q_{i_2 \ldots i_n k}, & \text{kui } q_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in F, \\ q_{i_1 i_2 \ldots i_n}, & \text{kui } q_{i_1 i_2 \ldots i_n} \notin F. \end{cases}$$

Kui automaat leiab n järjestikust numbrit, mille summa on väiksem kui n, siis läheb ta mitteaktsepteerivasse olekusse ja püsib seal kuni sisendi lõpuni.

(c) Oletame, et keel on regulaarne. Olgu p pumpamislemmast saadud positiivne täisarv. Valime $s = 0^p 1 0^p$. Siis $s \in \mathcal{L}_3$, sest s on palindroom. Samuti ilmselt $|s| \geq p$. Järelikult esitub s kujul $s = xyz$, kus iga $i \geq 0$ puhul $xy^i z \in \mathcal{L}_3$ ning $|y| > 0$ ja $|xy| \leq p$. Viimane võrratus näitab, et y koosneb ainult sümbolitest 0. Teiselt poolt vaatleme sõnet xy^2z. See on sõne kujul $00 \ldots 0100 \ldots 0$, kus sümbolist 1 paremal on p nulli, vasakul aga rohkem kui p nulli. Seega esimese $p+1$ numbri summa on 0, viimase $p+1$ numbri summa aga 1. Järelikult $xy^2z \notin \mathcal{L}_3$. Vastuolu.