# Kõverad ja pinnad: Osa I

Konstantin Tretjakov (kt@ut.ee)

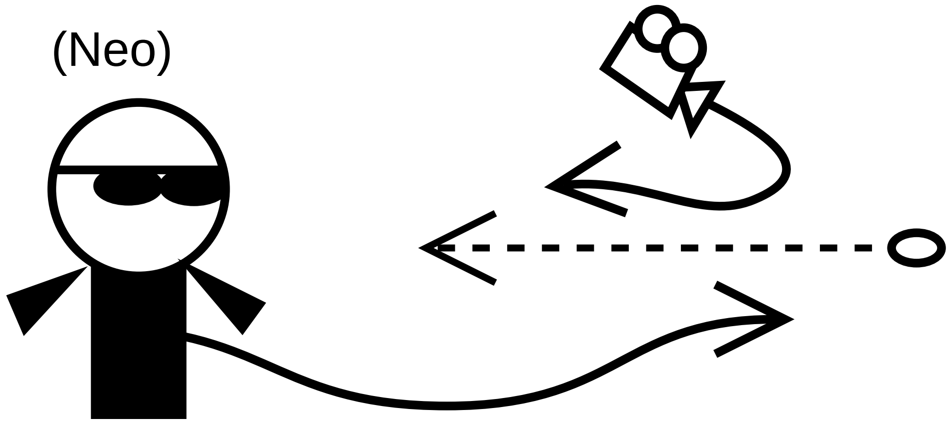
7. november 2005

# The Earth is not flat!

- Siiani oleme enamasti esitanud objekte hulknurkade ja mesh-ide (ehk hulktahukate) abil.
- Tegelikkuses on aga enamus objekte siledad, ning hulktahukas ei pruugi olla kõige parim lähendus.
- Täna näeme kuidas saab kirjeldada siledaid objekte *kõverjoonte ja -pindade* abil.

# Milleks kõverad?

- Kõverjooned ja -pinnad aitavad *modelleerida siledaid objekte*
- Kõverjoonte abil mugavalt *esitada liikumist*. Joon kirjeldab siis objekti trajektoori.



# Kõverad: Põhilised küsimused

- Kuidas kõveraid esitada?
  - Ilmutatud, ilmutamata ja parameetriline kujud.
  - Polünomiaalsed kõverad, tükiti polünomiaalsed (*splainid*), kernel-põhised/RBF-id.
- Kuidas neid määrata?
  - Kõver *interpoleerib* etteantud punkte.
  - Kõver *aproksimeerib* etteantud punkte.
  - Antud on kõvera suunavektorid alg- ja lõpp-punktis.
  - Kõver on määratud füüsikaliste seaduste abil.

# Ilmutatud esitus

- Koordinaadid esitatakse ilmutatult ühe valitud koordinaati kaudu:
  - Kahemõõtmelisel juhul: $y = f(x)$.
  - Kolmemõõtmelisel juhul: $(y, z) = (f(x), g(x))$.
- Joon ise on lihtsalt funktsiooni $f$ graafik.
- Ilmutatud esituses on võimatu esitada asju nagu “vertikaalne joon” või “ringjoon”, selle pärast ei kõlba ta graafikas kasutamiseks.

# Ilmutamata esitus

- Kahemõõtmelisel juhul saab joont määrata võrrandiga

$$f(x, y) = 0$$

- Näiteks
  - Ringjoon: $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$
  - Parabool: $x^2 - y = 0$
  - RBF-kujul kõver: $\sum_i w_i B_i(x, y) = 0$

# Ilmutamata esitus

- Kolmemõõtmelises ruumis on asi natuke keerulisem, kuna võrrand

$$f(x, y, z) = 0$$

  määrab hoopis pinna (3 muutujat, 1 võrrand $\Rightarrow$ 2 vabadusastet)

- Joone määramiseks on vaja kahte võrrandit:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

# Ilmutamata esitus

- Ilmutamata kuju on matemaatiliselt mugav, sellega on lihtne määrata standardseid kõveraid- ja pindu.
- Ilmutamata kujul esitatud kõverate ja pindade puhul on tihti mugav otsida lõikumispunkte raytracing-tüüpi algoritmides.
- Pinna normaalivektor $\mathbf{n}$ punktis $\mathbf{p} = (x, y, z)$ on leitav kui:

$$\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial x}, \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial y}, \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial z} \right)^T$$

# Ilmutamata esitus

- Ilmutamata esitust ei ole väga lihtne konstrueerida.
- Otseselt leida ilmutamata esitatud objekti punkte on tihti keeruline ja seega ei sobi selline esitus projitseerimis-põhise algoritmi jaoks.
- Meie vaatleme hoopis *parameetrilist esitust*.

# Parameetriline esitus

- Joon:
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}(t)$$
- Pind:
$$\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{f}(u, v)$$
- Sama üldine kuju kahe, kolme-, . . . , $n$-mõõtmelises ruumis.
- Näiteks:
  - Ringjoon: $\mathbf{p}(t) = (x(t), \, y(t)) = (\cos(t), \, \sin(t))$
  - Parabool: $\mathbf{p}(t) = (t, \, t^2)$
  - Spiraal: $\mathbf{p}(t) = (t, \, \cos(t), \, \sin(t))$

# Parameetriline esitus

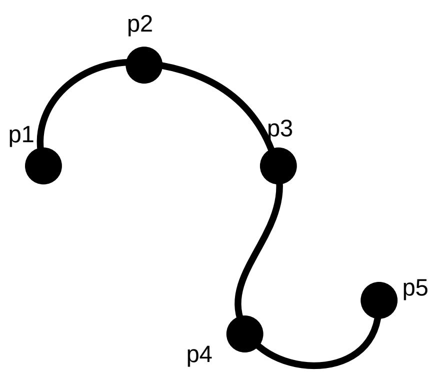
- Antud parameetri väärtuse jaoks kohe saab teada vastava punkti. Kõvera kõikide punktide saamiseks tuleb lihtsalt läbi vaadata kõikvõimalikud parameetri väärtused.
- Kõvera suunavektor (või *kiirus*) $\mathbf{s}$ punktis $\mathbf{p}(t)$ avaldub kui:

$$\mathbf{s}(t) = \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial x(t)}{\partial t}, \frac{\partial y(t)}{\partial t}, \frac{\partial z(t)}{\partial t} \right)^T$$

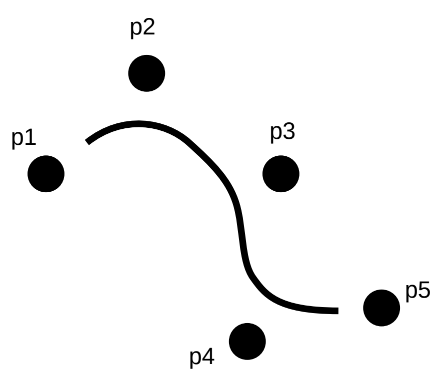
- On mugav kõveraid tükideks lõigata või tükidest kokku panna.

# Kõvera määramine

- Kõvera etteandmine valemina ei ole üldse mugav.
- Parem on määrata väike arv parameetreid ja nendest saada kätte vajaliku valemi.
- Näiteks võime määrata $n$ punkti ja nõuda et kõver interpoleeriks või aproksimeeriks neid.



Interpoleerimine



Aproksimeerimine

# Polünomiaalsed kõverad

- Graafikas on enimkasutatavad *polünomiaalsed kõverad*, s.t. selliseid, mille parameetriline esitus on polünoom $t$-st:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{c}_n t^n =$$

$$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} + c_{01} t + c_{02} t^2 + \cdots + c_{0n} t^n \\ c_{10} + c_{11} t + c_{12} t^2 + \cdots + c_{1n} t^n \\ c_{20} + c_{21} t + c_{22} t^2 + \cdots + c_{2n} t^n \end{pmatrix}$$

# Polünomiaalsed kõverad

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} c_{00} + c_{01}t + c_{02}t^2 + \cdots + c_{0n}t^n \\ c_{10} + c_{11}t + c_{12}t^2 + \cdots + c_{1n}t^n \\ c_{20} + c_{21}t + c_{22}t^2 + \cdots + c_{2n}t^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{00} & \cdots & c_{0n} \\ c_{10} & \cdots & c_{1n} \\ c_{20} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} =: \mathbf{C}\mathbf{T}_n(t)$$

# Polünomiaalsed kõverad

- $d$-mõõtmeline $n$-astme polünomiaalne kõver avaldub kujul $\mathbf{CT}_n(t)$ kus $\mathbf{C}$ on $d \times (n+1)$ *koeffitsientide maatriks* ning $\mathbf{T}_n(t) := (1, t, \ldots, t^n)^T$.
- Kõvera määramiseks tuleb määrata maatriksit $\mathbf{C}$. Kuna selles on $d \times (n+1)$ elemente, on maatriksi määramiseks vaja anda ette $n+1$ $d$-mõõtmelist parameetrit, näiteks $n+1$ punkte mida antud kõver peab interpoleerima või aproksimeerima.

# Polünomiaalsed kõverad

- Olgu siis antud $n+1$ punkti $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$.
- Vaatleme kahte viisi kuidas saab nendest konstrueerida $n$-mõõtmelise polünomiaalse kõvera:
  - Lagrange'i interpoleerimine
  - Bezier' kõver
- Mõlemal juhul saame polünomiaalse kõvera, seega mõlemad meetodid määravad sama kõverate klassi, erineb ainult konstrueerimisviis (ühel juhul saame antud punkte interpoleeriva kõvera, teisel juhul aproksimeeriva).

# Lagrange-i interpoleerimine

- Olgu meil antud lisaks punktidele $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ ka $n+1$ parameetri väärtust $t_0, t_1, \ldots t_n$.
- Otsime kõverat, mis iga $i = 0, \ldots, n$ rahuldaks: $\mathbf{p}(t_i) = \mathbf{p}_i$.
- S.t. iga $i$ korral: $\mathbf{CT}(t_i) = \mathbf{p}_i$.
- Gruppeerime kokku üheks maatriksvõrrandiks:

$$\mathbf{C}(\mathbf{T}(t_0)\,\mathbf{T}(t_1)\ \ldots\ \mathbf{T}(t_n)) = (\mathbf{p}_0\,\mathbf{p}_1\ \ldots\ \mathbf{p}_n)$$

$$\mathbf{CA} = \mathbf{P}$$

# Lagrange-i interpoleerimine

- Seega otsitava kõvera koeffitsientide maatriks on leitav kui

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}$$

kus

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A}$ on pööratav kui $i \neq j \Rightarrow t_i \neq t_j$.

# Lagrange-i interpoleerimine

- Nagu edaspidi näeme on graafikas väga levinud kolmanda astme kõverad. Proovime konkreetse näitena konstrueerida punkte $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ interpoleeriva kolmanda astme kõvera.
- Olgu punktidele vastavad parameetrite väärtused $t_0 = 0$, $t_1 = 1/3$, $t_2 = 2/3$, $t_3 = 1$. Siis

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & (1/3)^2 & (2/3)^2 & 1 \\ 0 & (1/3)^3 & (2/3)^3 & 1 \end{pmatrix}$$

# Lagrange-i interpoleerimine

kust

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5.5 & 9 & -4.5 \\ 0 & 9 & -22.5 & 13.5 \\ 0 & -4.5 & 18 & -13.5 \\ 0 & 1 & -4.5 & 4.5 \end{pmatrix}$$

ning

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}\mathbf{M}_L\mathbf{T}(t)$$

# Geometry & basis matrices

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}\mathbf{M}_L\mathbf{T}(t)$$

- Maatriksit $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_0\,\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3)$ nimetame *geomeetria maatriksiks (geometry matrix)*.
- Maatriksit $\mathbf{M}_L$ nimetame *Lagrange'i interpoleerimise baasmaatriksiks (basis matrix)*.
- Edaspidi näeme et ka muud kõverad on esitatavad geomeetria- ja baasi-maatriksite abil kujul

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{T}(t)$$

# Segamisfunktsioonid

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}\mathbf{M}_L\mathbf{T}(t)$$

- Vaatleme korrutist $\mathbf{M}_L\mathbf{T}(t)$:

$$\mathbf{M}_L\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} 1 - 5.5t + 9t^2 - 4.5t^3 \\ 9t - 22.5t^2 + 13.5t^3 \\ -4.5t + 18t^2 - 13.5t^3 \\ t - 4.5t^2 + 4.5t^3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}$$

- Funktsioone $b_i(t)$ nimetame *segamisfunktsioonideks (blending functions)*.

# Segamisfunktsioonid

- Kõver esitub segamisfunktsioonide kaudu kui:

$$\mathbf{p}(t) = b_0(t)\mathbf{p}_0 + b_1(t)\mathbf{p}_1 + b_2(t)\mathbf{p}_2 + b_3(t)\mathbf{p}_3$$

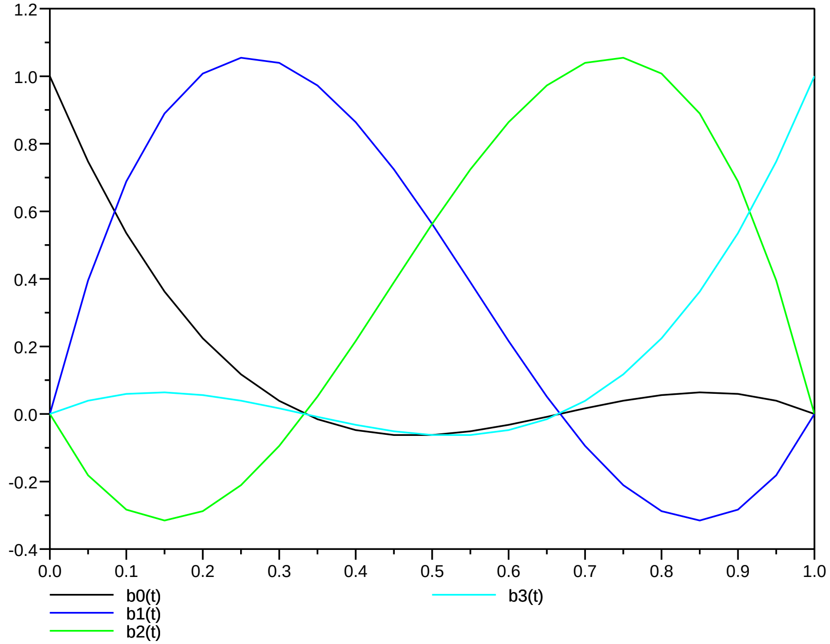
- Sellist esitust oleksime võinud saada ka otse, otsides polünoome $b_i(t)$ mis rahuldaksid:

$$b_i(t_i) = 1 \qquad b_i(t_j) = 0, \quad \text{kui } i \neq j$$

- $b_i(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)...(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})...(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)...(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})...(t_i-t_n)}$

# Segamisfunktsioonid

Lagrange-i segamisfunktsioonid kolmemõõtmelisel juhul:



# Segamisfunktsioonid

- Segamisfunktsioonide puhul kehtib: $\sum_i b_i(t) = 1$
- Selliste segamisfunktsioonide abil esitatav kõver $\mathbf{p}(t) = \sum_i b_i(t)\mathbf{p}_i$ rahuldab olulist omadust:

$$\mathbf{Ap}(t) + \mathbf{d} = \sum_i b_i(t)(\mathbf{Ap}_i + \mathbf{d})$$

s.t. pole vahet kas rakendada afiinset teisendust kontrollpunktidele ja konstrueerida kõverat, või teisendada algsete punktide abil tehtud kõvera.

# Segamisfunktsioonid

- See omadus on niivõrd loomulik ja vajalik et edaspidi ka teiste kõverate puhul nõuame et neid saaks esitada segamisfunktsioonide abil

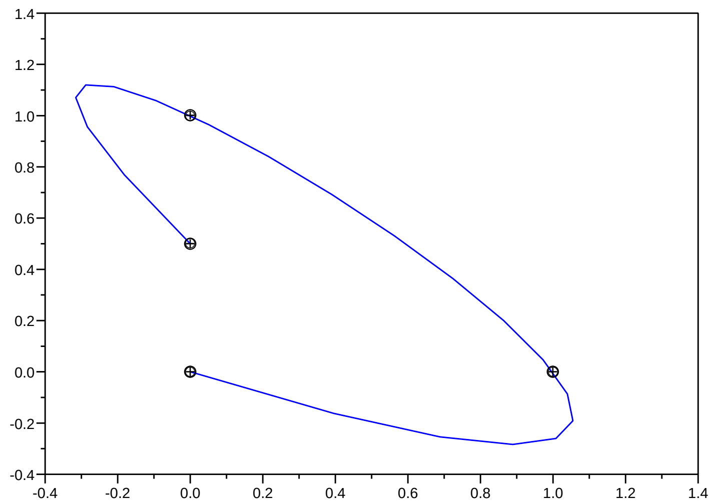
$$\mathbf{p}(t) = \sum_i b_i(t)\mathbf{p}_i$$

  või siis samaväärselt geomeetria- ja baasimaatriksi abil

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{GMT}(t)$$

# Lagrange-i kõver

- Vaadeldud Lagrange-i interpoleerimiskõver on hea teoreetiline näide, kuid praktikas teda ei kasutata kuna ta tihti on “liiga võnkuv”.




# Bezier' kõverad

- Oluliselt "rahulikumad" on *Bezier'* kõverad.
- $n$ astme Bezier kõver:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^{(n)}(t)\mathbf{p}_i$$

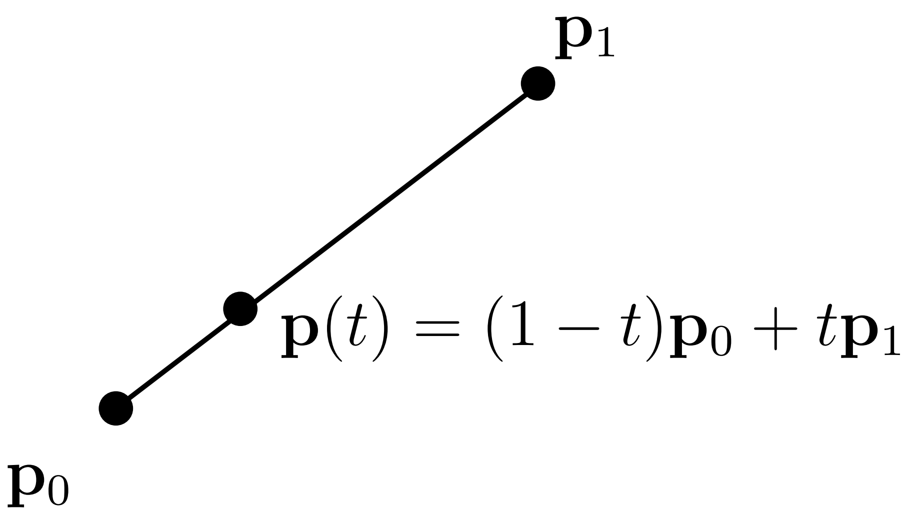
kus

$$B_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$$

on *Bernsteini polünoomid*

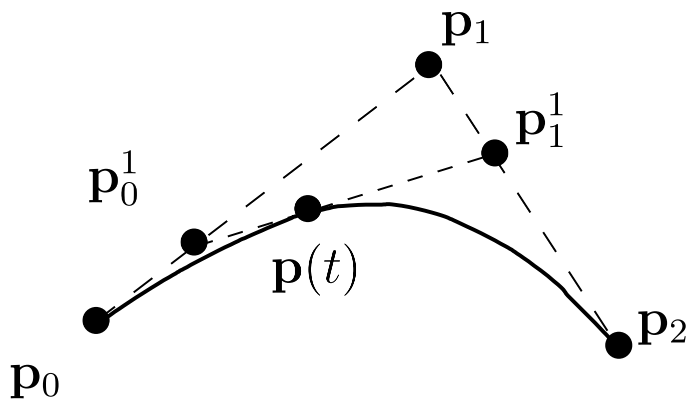
# Bezier' kõverad

Esimese astme Bezier kõver:



# Bezier' kõverad

Teise astme Bezier kõver:

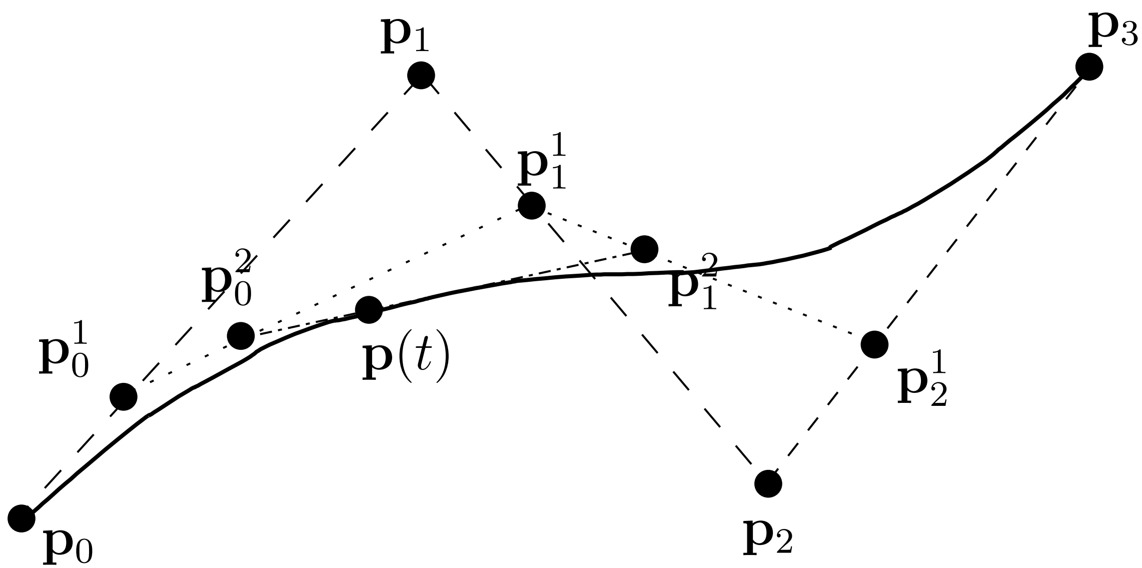



$$\mathbf{p}_0^1 = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1 \qquad \mathbf{p}_1^1 = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{p}_0^1 + t\mathbf{p}_1^1 = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2(1-t)t\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$

# Bezier' kõverad

Kolmanda astme Bezier kõver:




# Bezier' kõverad

Kolmanda astme Bezier kõver:

$$\mathbf{p}_0^1 = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1 \qquad \mathbf{p}_0^2 = (1-t)\mathbf{p}_0^1 + t\mathbf{p}_1^1$$

$$\mathbf{p}_1^1 = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2 \qquad \mathbf{p}_1^2 = (1-t)\mathbf{p}_1^1 + t\mathbf{p}_2^1$$

$$\mathbf{p}_2^1 = (1-t)\mathbf{p}_2 + t\mathbf{p}_3$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (1-t)\mathbf{p}_0^2 + t\mathbf{p}_1^2 \\ &= (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3 \\ &= \sum_{i=0}^{3} B_i^{(3)}(t)\mathbf{p}_i\end{aligned}$$

# Bernsteini polünoomid

$$B_0^{(0)} = 1$$

$$B_0^{(1)} = (1-t) \qquad B_1^{(1)} = t$$

$$(1-t)^2 \qquad 2(1-t)t \qquad t^2$$

$$(1-t)^3 \qquad 3(1-t)^2 t \qquad 3(1-t)t^2 \qquad t^3$$

$$\boxed{B_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i}$$

# Bezier' kõverad

- Loomulikult rahuldavad Bezier' kõvera segamisfunktsioonid tingimust:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^{(n)}(t) = 1$$

- Lisaks on iga $t \in [0, 1]$ korral

$$0 \leq B_i^{(n)}(t) \leq 1$$

See tagab seda, et Bezier kõver on alati oma kontrollpunktide kumera katte sees.

# Bezier' kõverad

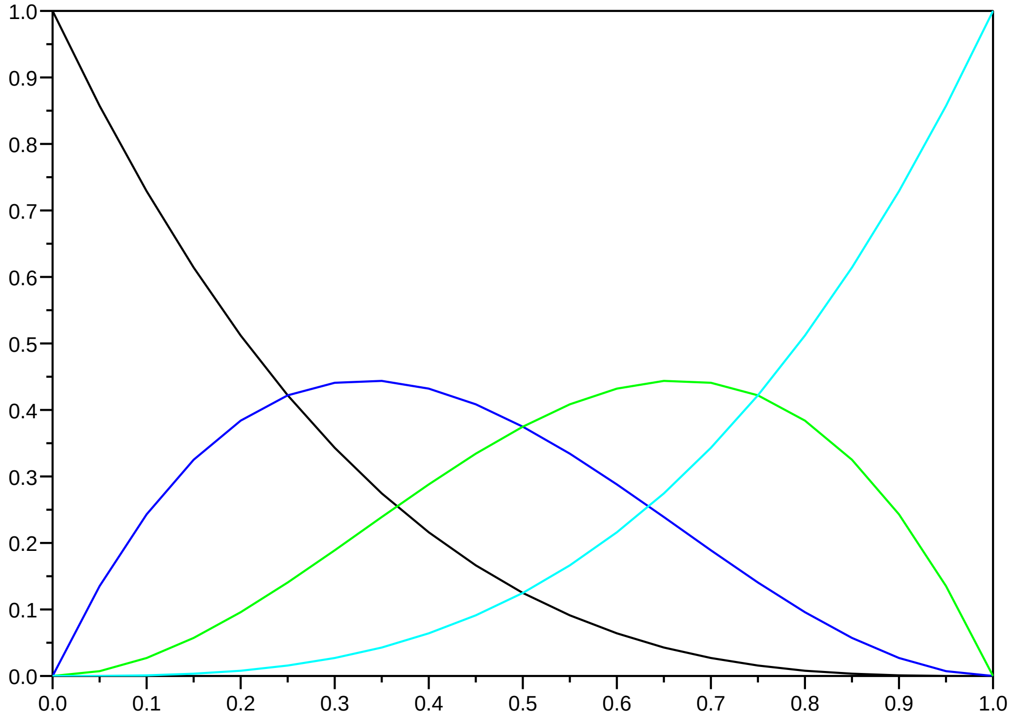
- Kõige levinumad on jällegi 3-nda astme Bezier' kõverad:

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3$$

- Esitus maatrikskujul:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}\mathbf{M}_B\mathbf{T}(t), \qquad \mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Bernsteini segamisfunktsioonid



# Suunavektor

- Uurime bezier kõvera suunavektorit $\mathbf{s}(t)$ alg- ja lõpp-punktis:

$$\mathbf{s}(t) = \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} = \mathbf{P}\mathbf{M}_B \frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t}$$

kus

$$\frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} =: \mathbf{T}'(t)$$

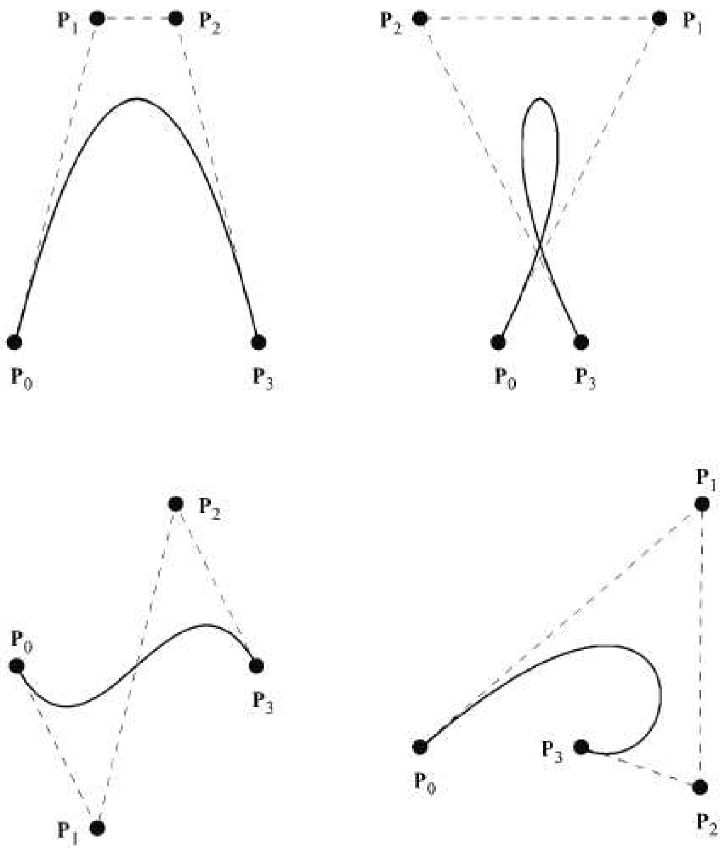
# Bezier' kõverad

- Kust saame

$$\mathbf{s}(0) = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \qquad \mathbf{s}(1) = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

- See omadus tagab teatud “intuitiivsust” kõvera konstrueerimisel, ja selle pärast interaktiivsetes graafikaprogrammides on 4 kontrollpunktiga Bezier kõverad väga levinud.
- Seda omadust kasutades saab väiksematest jupidest konstrueerida sileda pika kõvera.

# Bezier' kõverad



# Hermite'i kõverad

- Levinud on ka järgmine kuupkõverate esitamisviis: kõvera määramiseks antakse ette tema alg, ja lõpp-punktid $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_3$, ning tema suunavektorid nendes punktides $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}_3$.
- Geomeetriamaatriksi kuju on siis $\mathbf{G} = (\mathbf{p}_0\, \mathbf{p}_3\, \mathbf{s}_0\, \mathbf{s}_3)$.
- Baasimaatriks (veenduge ise!):

$$\mathbf{M}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Tükiti polünomiaalsed kõverad

- Polünomiaalsete kõverate esitamisvõimsus on praktikas piiratud: pikki kõveraid on nende abil kirjeldada ebaefektiivne.
- Hoopis lihtsam on panna pika kõverat kokku väiksematest lihtsatest tükidest. Tavaliselt valitakse tükideks kuupkõveraid, kuna need on suhteliselt lihtsad ning piisavalt võimsad selleks et neid võiks mugavalt “kokku kleepida”.
- Selliseid *tükiti polünomiaalseid* kõveraid nimetatakse *splainideks*.

# Kõverate kokkukleepimine

- Olgu $\mathbf{p}(t), t \in [0,1]$ ja $\mathbf{q}(t), t \in [0,1]$ kaks kõverat, mida üritame kokku kleepida.
- Tükide kokku kleepimisel võime esitada erinevaid nõudmisi:
  - Kombineeritud kõver on pidev: $\mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(0)$.
  - Võime nõuda et ta oleks ka sile:
    - Nõuame ainult visuaalset (*geomeetrilist*) siledust: $\dfrac{\partial \mathbf{p}(1)}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial \mathbf{q}(0)}{\partial t}, \qquad \alpha > 0.$
    - Või ka tegelikku (*parameetrilist*): $\dfrac{\partial \mathbf{p}(1)}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{q}(0)}{\partial t}.$

# Kõverate kokkukleepimine

- Analoogselt võime nõuda kõrgemat järku geomeetrilist või parameetrilist siledust, seega:
- Kõver on antud punktis $C^k$ - *pidev* ($k$-ndat järku parameetriliselt pidev) kui:

$$\forall m \in 1, \ldots, k \qquad \frac{\partial^m \mathbf{p}(1)}{\partial t^m} = \frac{\partial^m \mathbf{q}(0)}{\partial t^m}$$

- Kõver $G^k$ - *pidev* ($k$-ndat järku geomeetriliselt pidev) kui ta on $C^{k-1}$-pidev ning $\frac{\partial^k \mathbf{p}(1)}{\partial t^k} = \alpha \frac{\partial^k \mathbf{q}(0)}{\partial t^k}$, $\alpha > 0$.

# Kõverate kokkukleepimine

- Visuaalselt sileda kõvera jaoks piisab tihti $G^1$-pidevusest.
- Kui kõverat kasutatakse mingi asja trajektoorina, siis on tavaliselt vajalik vähemalt $C^2$-pidevus (siis kiirendus ei muutu hüppeliselt).

# Splainid

- Olgu siis meil antud punktid $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$. Leiame "maksimaalselt pideva" tükiti polünomiaalse kõvera mis interpoleeriks neid punkte.
- Kogu kõver koosneb polünomiaalsetest tükidest: $\{\mathbf{q}_0(t), \mathbf{q}_1(t), \ldots, \mathbf{q}_{n-1}(t)\}$ kus iga $\mathbf{q}_i(t)$ määrab parameetrite väärtuste $[t_i, t_{i+1}]$ korral kõvera jupi punktide $\mathbf{p}_i$ ja $\mathbf{p}_{i+1}$ vahel.

# Lineaarne splain

- Lineaarne splain: tükiti lineaarne kõver.

$$\mathbf{q}_i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\mathbf{p}_i + \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\mathbf{p}_{i+1}$$

- Saavutab ainult $C^0$-pidevust.

# Ruut splain

- Ruut splain: tükiti ruutkõver.
- Nüüd on meil parameetreid rohkem ning saame nõuda et kõver saavutaks $C^1$-pidevust:

$$\mathbf{q}_i(t_{i+1}) = \mathbf{q}_{i+1}(t_i)$$
$$\mathbf{q}'_i(t_{i+1}) = \mathbf{q}'_{i+1}(t_i)$$

- Need piirangud, tingimus et kõver peab interpoleerima etteantud punkte ning kaks suvaliselt valitud väärtust tuletise jaoks kõvera alg- ja lõpp-punktis (tavaliselt 0) määravad splaini ühiselt.

# Kuup splain

- Tükiti kuup-polünoom.
- Veel rohkem parameetreid, ning lisaks nõue et kõver oleks $C^2$-pidev.
- Analoogselt eelmise juhuga tuleb määrata kõvera teist tuletist alg- ja lõpppunktis. Tavaliselt pannakse 0-ks.
- Analoogselt eelmise juhuga vastust saab lahendades vastava lineaarvõrrandsüsteemi.

# Kuup splain

- Kuupsplanid kasutatakse tihti kui on vaja esitada sujuvat liikumist läbi etteantud punkte.
- Samas on nad natuke ebamugavad sest tuleb lahendada LVS-i (tõsi küll väga lihtsat).
- Kontrollpunktide lisamine ja eemaldamine võib mõjutada terve kõvera kuju.
- Alternatiiv: B-splainid. Kuid nendest järgmine kord, stay tuned.

# Kokkuvõte

- Polünomiaalne kõver:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \cdots + \mathbf{c}_n t^n := \mathbf{C}\mathbf{T}_n(t)$$

- Esitus geomeetria- ja baasimaatriksite kaudu:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{T}(t)$$

- Esitus segamisfunktsioonide kaudu:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i(t)\mathbf{p}_i, \qquad \sum_{i=0}^{n} b_i(t) = 1$$

# Kokkuvõte

- Interpoleerivad kõverad:
  - Lagrange'i interpolatsioon
  - $n$-da astme splainid
- Aproksimeerivad kõverad
  - Bezier kõverad.
  - B-splain.
- Mõnede kuupkõverate baasimaatriksid: $M_L$, $M_B$, $M_H$.

# Küsimused